Devoir surveillé n°4

18/01/2014

durée : 4 heures

•••••••••

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

•••••••••

EXERCICE I

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On note S la matrice de taille $2n \times 2n$ dont le coefficient d'ordre (i, j) vaut 1 si $i + j = 2n + 1$ et 0 sinon.

1. Vérifier que S est symétrique, en déduire qu'elle est diagonalisable.
2. Montrer que S est son propre inverse.
3. En déduire le polynôme minimal de S.
4. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note v_i et w_i les vecteurs de $\mathbb{R}^{2n}$ définis par :

$$v_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 1 & \text{si } k = 2n+1-i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   et

$$w_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ -1 & \text{si } k = 2n+1-i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

   Montrer que v_i et w_i sont vecteurs propres de S, associés respectivement aux valeurs propres 1 et -1.
5. Soit P la matrice dont les vecteurs colonnes sont $(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n)$. Montrer que

$$P^t P = 2I.$$

6. En déduire une diagonalisation de S dans une base orthonormée.
7. Soient a et b deux réels. On pose $A = aI + bS$, où I désigne la matrice identité de taille $2n \times 2n$.
   Diagonaliser A dans une base orthonormée.
   Quel est le polynôme caractéristique de A ?
   Quel est son polynôme minimal ?

Exercice II

Sur $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien noté $(.|.)$, on considère une forme bilinéaire symétrique f de matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ par rapport à la base canonique, et l'on pose

$$q(x) = f(x, x).$$

1. Montrer que les applications $x \mapsto \dfrac{\partial q}{\partial x_k}(x)$ sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ et vérifiant $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial q}{\partial x_i}(x) = 2q(x)$.

2. Soit φ l'application définie par :

$$\begin{array}{rlll} \varphi : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial q}{\partial x_1}(x), \ldots, \dfrac{\partial q}{\partial x_n}(x)\right) \end{array}$$

   a) Montrer que φ est l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $(\varphi(x)|y) = f(x, y)$.
   b) Établir que φ et f admettent la même matrice par rapport à toute base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
   c) Établir que l'espace $\mathbb{R}^n$ admet une base orthonormée $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ faite de vecteurs propres de φ et que par rapport à une telle base

$$q(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i^2$$

   où $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i v_i$ et $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$.

3. Soit λ une valeur propre de φ. Montrer que

$$\varphi(x) = \lambda x \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \frac{\partial q}{\partial x_i}(x) = 2\lambda x_i$$

   et que dans ce cas $q(x) = \lambda(x|x)$.

4. Application numérique : Trouver une forme réduite de la forme quadratique

$$\begin{array}{rlll} q : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y, z) & \longmapsto & xy + yz + xz \end{array}$$

Problème

On admet que la somme de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k^2}$, $k \geq 1$ vaut $\dfrac{\pi^2}{12}$.

I. Transformation d'Abel

1. On considère deux suites de nombres réels $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$. On pose alors $A_p = \sum\limits_{i=1}^{p} a_i$ et $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$.
   Établir la relation :

$$S_n = \sum_{i=2}^{n} A_{i-1}(b_{i-1} - b_i) + A_n b_n.$$

2. On suppose que les suites de la question précédente satisfont simultanément aux conditions suivantes :
• il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $p \geq 1$ on a : $|A_p| \leq M$;
• la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ est monotone et converge vers zéro.
Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $p \geq 0$ on a :

$$|S_{n+p} - S_n| \leq 2M|b_{n+1}|$$

et en déduire que la série numérique dont le terme général est le produit $a_n b_n$ est convergente.

3. Déduire de ce qui précède qu'une série alternée de terme général u_n, tel que la suite de terme général $|u_n|$ est décroissante et converge vers 0, est une série convergente.

4. Soit les fonctions de la variable réelles x définies pour tout entier $n > 0$ par :

$$f_n : x \mapsto f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

a) Pour quelles valeurs de x la série de fonctions de terme général f_n est-elle : convergente ? absolument convergente ?

b) A quelle condition doit satisfaire x_1 pour que la série de fonctions de terme général f_n soit normalement convergente sur tout intervalle $[x_1, x_2]$ vérifiant $x_1 < x_2$?

II. Application à l'étude d'une série trigonométrique

1. Soit n entier strictement positif et $x \neq 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Établir les formules :

$$(1)\quad \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)};$$

$$(2)\quad \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \sin(n+1)\frac{x}{2}\frac{\sin n\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. k étant entier naturel, n étant entier strictement positif et s étant réel, on définit, pour $x \neq 2k\pi$, les fonctions réelles g_n et h_n respectivement par :

$$g_n : x \mapsto g_n(x) = \frac{1}{n^s}\sin(nx);$$

$$h_n : x \mapsto h_n(x) = \frac{1}{n^s}\cos(nx).$$

Déduire de ce qui précède les valeurs de s pour lesquelles les séries de terme général respectif g_n et h_n sont simultanément simplement convergentes sur l'ensemble de définition de ces fonctions.

3. k étant un entier naturel, on définit, pour tout $x \neq 2k\pi$, la fonction réelle y_n, de la variable réelle x, par :

$$y_n : x \mapsto y_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\sin(kx).$$

a) Déterminer des expressions $v_n(x)$ et $w_n(x)$ telles que :

$$(3)\ \ y_n(x) = \frac{\pi - x}{2} + \frac{1}{2n+1}\left[v_n(x) + \int_{\pi}^{x} w_n(t)dt\right] \qquad \text{où} \quad 0 < x < \pi.$$

b) Soit α et β des réels tels que $0 < \alpha < \beta < \pi$. Déduire de (3) que la suite de terme général y_n converge uniformément sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ vers la fonction

$$y:\ x \mapsto y(x) = \frac{\pi - x}{2}.$$

4. a) Montrer que pour tout x, tel que $-\pi < x < 0$ ou $0 < x < \pi$, la série de fonctions de terme général

$$z_n:\ x \mapsto z_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$$

est convergente et déterminer la valeur de sa somme en fonction de celle de x.

b) En déduire la limite, lorsque p tend vers l'infini, de la somme :

$$S_p = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + (-1)^p \frac{1}{2p+1}.$$

III. Calcul d'une intégrale

Établir la convergence de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt.$$

Justifiant soigneusement chaque étape du calcul, déterminer le terme général d'une série numérique convergente dont I est la somme. Donner le réel auquel I est égal.

Fin de l'épreuve