Centre Ibn Abdoune
des Classes Préparatoire
aux Grandes Écoles
Khouribga

Année scolaire : 2013/2014
Filière **MP**

DEVOIR SURVEILLÉ N°5

15/02/2014

durée : 4 heures

● ● ● ● ● ● ● ●

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

● ● ● ● ● ● ● ●

Exercice

Soit

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f .
2. Étudier la convergence en $-R$ et en R .
3. a) Soit $M > 0$. Montrer qu'il existe un entier $N \geq 1$ et un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1 - \delta, 1[$, alors

$$\sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n \geq M.$$

- b) En déduire la limite de $f(x)$ quand $x \rightarrow 1^-$.
4. a) On considère la série entière

$$g : x \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} \left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \right] x^n.$$

Démontrer que cette série converge normalement sur $[0, 1]$.

- b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f(x) = 0$.

Problème

Soit $\mathcal{C}^\infty$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes indéfiniment dérivables et $\mathcal{S}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty$ constitué des fonctions f de $\mathcal{C}^\infty$ telles que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^p f^{(q)}(x) = 0.$$

Soit U, V, H les applications de $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathcal{C}^\infty$ définies par :

$$(Uf)(x) = xf(x) + f'(x);$$

$$(Vf)(x) = xf(x) - f'(x);$$

$$(Hf)(x) = x^2 f(x) - f''(x).$$

L'objet du problème est l'étude et la détermination des valeurs propres et des sous-espaces propres de l'application linéaire H .

PARTIE I

1. Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathcal{S}$ de $\mathcal{C}^\infty$ est stable par la multiplication. Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{tx - \frac{x^2}{2}}$ est un élément de $\mathcal{S}$. $\mathcal{S}$ est donc un sous-algèbre non réduite à $\{0\}$.

2. Démontrer que les applications U, V et H sont des endomorphismes de $\mathcal{S}$ et exprimer l'application composée $V \circ U$ en fonction de H et l'application identité Id .

3. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{S}$ et pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, il existe $M_{p,q} \in \mathbb{R}^+$, dépendant de f tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|x^p f^{(q)}(x)| \leq \frac{M_{p,q}}{1+x^2}.$$

4. Soit f et g deux éléments de $\mathcal{S}$. Prouver que les applications

$$x \mapsto f^2(x) \quad \text{et} \quad x \mapsto f(x)g(x)$$

ont des intégrales absolument convergentes sur toute la droite $\mathbb{R}$.

5. Dédurre de ce qui précède, que l'application de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$(f, g) \mapsto (f|g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}g(x)dx$$

fait de $\mathcal{S}$ un espace préhilbertien complexe. Soit $\|f\|$ la norme de f dans cet espace. Expliciter l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en déduire une relation entre

$$I_1 = (f|g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}g(x)dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \quad \text{et} \quad I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx.$$

6. Démontrer que pour tout couple (f, g) de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$, on a :

$$(Uf|g) = (f|Vg); \quad (Vf|g) = (f|Ug) \quad \text{et} \quad (Hf|g) = (f|Hg).$$

En déduire que si les valeurs propres de l'endomorphisme H , défini dans $\mathcal{S}$, existent elles sont réelles.

PARTIE II

Soit t un réel quelconque. Soit u_t la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_t(x) = a(t)e^{tx - \frac{x^2}{2}} \quad \text{où } a(t) \in \mathbb{R}^+.$$

1. Prouver que $u_t \in \mathcal{S}$ et déterminer $a(t)$ de façon que $\|u_t\| = e^{\frac{t^2}{4}}$ en supposant connu $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Exprimer $(Uu_t)(x)$ et $(Vu_t)(x)$ en fonction de t, x et $u_t(x)$.

On suppose, dans la suite du problème, que $\|u_t\| = e^{\frac{t^2}{4}}$.

2. Soit $f \in \mathcal{S}$. Montrer que l'application $x \mapsto f(x)e^{tx - \frac{x^2}{2}}$ a une intégrale absolument convergente sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3. Soit Lf la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(Lf)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x)f(x)dx.$$

a) Calculer Lu_0 .

b) Montrer les propriétés suivantes :

i. $(Lf)(t) = (u_t|f)$;

ii. $(L \circ V)(f)(t) = t(Lf)(t)$,

iii. La fonction définie par $t \mapsto (Lf)(t)e^{-\frac{t^2}{4}}$ est bornée.

4. Soit $f \in \mathcal{S}$. Désignons par F, G et F_n les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{tx - \frac{x^2}{2}} dx$$

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{tx - \frac{x^2}{2}} dx$$

$$F_n(t) = \int_{-n}^{+n} f(x)e^{tx - \frac{x^2}{2}} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Prouver que F_n est continument dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que sur tout intervalle $[-A, +A]$, $A > 0$, la suite de fonctions $(F'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers G et de même la suite de fonctions $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers F .

c) En déduire la dérivée de F .

5. En déduire que pour tout $f \in \mathcal{S}$, $(Lf)' = \frac{1}{2}(L \circ U)(f)$. Démontrer que L est linéaire de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{C}^\infty$.
6. Exprimer $(L \circ H)f$ en fonction de Lf et $(Lf)'$.

PARTIE III

Soit h_0 définie par $h_0(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et h_n définie par $h_n = V^n h_0$, $n \in \mathbb{N}^*$ où $V^n = V \circ V \circ \dots \circ V$ n fois.

1. Calculer Lh_n , $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $f \in \mathcal{S}$, P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et $g_n : x \mapsto x^n f(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que
 - a) $Lf = 0 \iff (\forall n \in \mathbb{N}, Lg_n = 0)$.
 - b) $L(Ph_0) = 0 \implies P = 0$ où $Ph_0(x) = P(x)h_0(x)$.

3. Soit $\mathcal{E}$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{E} = \{f / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = P(x)h_0(x), P \in \mathbb{C}[X]\}.$$

Montrer que l'application L est injective de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{C}^\infty$.

4. Montrer que les seules valeurs du réel λ pour lesquelles l'équation différentielle

$$2ty'(t) + y(t) = \lambda y(t),$$

admet une solution non nulle dans l'espace $\mathcal{C}^\infty$ sont de la forme $\lambda = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

En déduire que les seules fonctions propres de l'endomorphisme H , qui appartiennent à $\mathcal{E}$, sont les h_n (à un facteur près) associées aux valeurs propres $2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Indiction : utiliser la question 5. de la partie II.

FIN D'ÉPREUVE