

Centre Ibn Abdoune
des Classes Préparatoire
aux Grandes Écoles
Khouribga

Année scolaire : 2013/2014
Filière **MP**

DEVOIR SURVEILLÉ N°6

15/03/2014

durée : 4 heures

• • • • •

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

• • • • •

Exercice

1. On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$ (intégrale de Wallis) avec $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que I_n s'exprime en fonction de I_{n-2} .

En déduire l'expression de I_{2n} en fonction de n .

2. Le mouvement d'un pendule simple est régi par l'équation différentielle

$$(E_1) \quad \theta''(t) + \frac{g}{l} \sin(\theta(t)) = 0$$

où g et l sont des constantes.

Soit θ la solution de (E_1) correspondant à $\theta(0) = \alpha$ et $\theta'(0) = 0$ avec $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. On

admet que θ est une solution périodique, dont la période T vérifie $\theta\left(\frac{T}{2}\right) = -\alpha$, θ

étant décroissante sur $\left[0, \frac{T}{2}\right]$.

- a) Montrer que la quantité

$$\frac{1}{2}\theta'^2(t) - \frac{g}{l} \cos(\theta(t))$$

est constante.

b) Montrer que la période T vérifie :

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\alpha \frac{dt}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}}$$

En déduire que

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2(x)}}$$

avec $a^2 = \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

c) Développer $(1 - a^2 \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}$ en série entière de la variable $a \sin x$. Justifier l'intégration terme à terme de ce développement, et en déduire le développement

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 a^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 a^4 + \dots \right)$$

dans lequel on donnera l'expression du terme général.

d) Soit $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$ donner une valeur approchée de $\frac{T}{T_0}$ à la précision de $5 \cdot 10^{-6}$ (on justifiera que la précision désirée est atteinte).

Problème

Dans tout ce problème f désigne une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes continue sur $]0, +\infty[$. On se propose d'étudier la transformation qui à f associe la fonction

$$x \mapsto T[f](x) = \int_0^{+\infty} f(t) \sin(xt) dt.$$

On notera que lorsque cette transformée est définie, c'est une fonction impaire en x .

Partie I

1. Trouver les valeurs du réel α pour lesquelles la transformée $T[f_\alpha]$ de $t \mapsto f_\alpha(t) = t^\alpha e^{-t}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Calculer cette transformée pour les valeurs 0 et 1 de α .

2. Dans cette question il sera utile de considérer $T[f](x)$ comme la limite de la suite de fonctions $x \mapsto T_n[f](x) = \int_{\frac{1}{n}}^n f(t) \sin(xt) dt$.

a) Montrer que si l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ est absolument convergente, la transformée $T[f]$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

- b) On suppose que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |tf(t)|dt$ converge. Montrer que $T[f]$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que $T[f]$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée sous forme d'une intégrale.
- c) Prouver que la fonction $f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ vérifie la condition du b) et calculer sa transformée $T[f]$.

Partie II

1. Montrer que la transformée de $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ est sur $]0, +\infty[$ une constante C dont on déterminera la valeur au 2.d).
2. a) Démontrer que la valeur de l'intégrale $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt$ ne dépend pas de l'entier n et préciser cette valeur.
- b) Montrer que si ϕ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t) \sin(nt) dt$ est 0.
- c) Montrer que la fonction $\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ peut être prolongée en 0 en une fonction $t \mapsto \phi(t)$ qui vérifie l'hypothèse du b). Préciser les valeurs de cette fonction et de sa dérivée en 0.
- d) On considère la fonction ϕ de c). En étudiant l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t) \sin((2n+1)t) dt$ déduire de ce qui précède la valeur de la constante C de la question 1.
3. On désire calculer la transformée $T[f]$ de la fonction $t \mapsto f(t) = \frac{1}{t(1+t^2)}$
- a) Montrer que $T[f]$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a

$$(T[f])'(x) = \frac{2}{x} \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{(1+t^2)^2} dt$$

pour $x > 0$.

- b) Prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} T[f](x) = C$.
- c) Démontrer que $T[f]$ admet une dérivée seconde sur $]0, +\infty[$ et qu'elle est sur cet intervalle solution de l'équation différentielle $y - y'' = C$.
En déduire une expression simple de $T[f]$.

Partie III

1. Soit $x \neq 0$ un réel fixé. On considère la fonction 2π -périodique qui pour $t \in [-\pi, \pi]$ prend la valeur $\text{ch}(xt)$.
Calculer ses coefficients de Fourier.

Donner un énoncé précis de théorème établissant la convergence de sa série de Fourier.

En déduire l'égalité :

$$\coth(\pi x) = \frac{1}{\pi x} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$$

2. a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ fixé la série de fonctions de terme général

$$u_n(t) = e^{-nt}, \quad n \geq 1$$

converge uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$.

Donner une expression simple de sa somme $g(t)$.

- b) Soit $x > 0$ fixé. Calculer pour $y \in]0, 1]$ la valeur de l'expression

$$v_n(y) = \int_y^{\frac{1}{y}} u_n(t) \sin(xt) dt, \quad n \geq 1,$$

et déterminer $v_n(0) = \lim_{y \rightarrow 0} v_n(y)$. Établir la convergence normale de la série de fonctions de terme général $v_n(y)$ sur $[0, 1]$. Exprimer sa somme sous forme d'une intégrale lorsque $y \in]0, 1]$.

- c) Montrer que la transformée $T[g]$ de la fonction du a) est définie et l'exprimer sous forme de série en utilisant les résultats précédents.

En utilisant le résultat de la question 1., montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1} dt = \frac{\pi}{2} \coth(\pi x) - \frac{1}{2x}.$$

3. Conclure au moyen de ce qui précède que la fonction

$$t \mapsto f(t) = \frac{1}{e^{t\sqrt{2\pi}} - 1} - \frac{1}{t\sqrt{2\pi}}$$

vérifie la relation $f = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T[f]$.

FIN DE L'ÉPREUVE