Centre Ibn Abdoune
des Classes Préparatoire
aux Grandes Écoles
Khouribga

Année scolaire : 2014/2015
Filière **MP**

Devoir surveillé commun n°1

20/09/2014

durée : 3 heures

••••••••

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

••••••••

L'exercice et les deux problèmes sont indépendants.

Exercice

On considère l'ensemble $E = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}/a, b \in \mathbb{Q}\}$.

1. Vérifier que E est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension 2.
2. On considère, sur E, les deux applications suivantes :

$$N_1 : \begin{array}{ll} E & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ a + b\sqrt{2} & \longmapsto |a| + |b| \end{array}$$

et

$$N_1 : \begin{array}{ll} E & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ a + b\sqrt{2} & \longmapsto |a + b\sqrt{2}| \end{array}$$

a) Montrer que les deux applications sont des normes sur E.

b) On considère les suites numériques définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; u_n = (1 - \sqrt{2})^n \;\text{ et }\; v_n = (1 + \sqrt{2})^n.$$

Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; u_n = a_n - b_n\sqrt{2} \;\text{ et }\; v_n = a_n + b_n\sqrt{2}.$$

c) En utilisant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que les deux normes ne sont pas équivalentes.

Problème I

On considère l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ muni de l'addition suivante :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ \ \forall (a',b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\ \ (a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$$

1. **a)** Montrer que $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ est un groupe et que les projections canoniques :

$$p_1 :\ (a,b) \longmapsto a \text{ et } p_2 :\ (a,b) \longmapsto b$$

sont des homomorphismes de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.

b) En déduire que :

$$\mathbb{Z} \times (1,0) = \{(m,0)\ /\ m \in \mathbb{Z}\} \text{ et } \mathbb{Z} \times (0,1) = \{(0,n)\ /\ n \in \mathbb{Z}\}$$

sont des sous-groupes de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$.

2. Soit G un sous-groupe de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

a) Montrer qu'il existe un entier $b \geq 0$ et un seul appartenant à $p_2(G)$ et tel que tout élément de $p_2(G)$ est un multiple de b.

b) Montrer que :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} \times (1,0) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & (x,0) & \longmapsto & f(x,0) = x \end{array}$$

est un isomorphisme.
En déduire les sous-groupes de $\mathbb{Z} \times (1,0)$.
Déterminer alors G si $b = 0$.

3. On suppose $b \neq 0$. Soit (a_0, b) un élément de G dont la deuxième projection est b.

a) Montrer que tout élément (m,n) de G s'écrit d'une manière unique sous la forme

$$(m,n) = r(a_0, b) + (s, 0)$$

où $r \in \mathbb{Z}$ et $s \in \mathbb{Z}$.

b) Prouver que l'application $\varphi :\ (m,n) \longmapsto s$ est un morphisme de groupes de G dans $\mathbb{Z}$.
En déduire que $\varphi(G) = l\mathbb{Z}\,;\, l \in \mathbb{Z}$.

4. En déduire que tout sous-groupe G de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est soit réduit à $(0,0)$ soit du type $\mathbb{Z}g_0$ où $g_0 \neq (0,0)$, soit du type $\mathbb{Z}g_0 + \mathbb{Z}g_1$ où g_0 et g_1, considérés comme éléments de $\mathbb{R}^2$, sont linéairement indépendants.

Problème II

On se propose, dans ce problème, de démontrer quelques propriétés des sous-corps du corps des complexes $\mathbb{C}$. On rappelle que, si $\mathbb{K}$ est un sous-corps d'un corps $\mathbb{K}'$, ce dernier est, en particulier, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, ce qui donne un sens à la $\mathbb{K}$-dimension de $\mathbb{K}'$, notée $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}')$.

Si $\mathbb{K}$ est un corps, on note $\mathbb{K}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On dit qu'un polynôme de degré > 0 est *irréductible* s'il ne peut pas s'écrire comme produit de deux polynômes de degrés > 0. Un polynôme est *unitaire* si le coefficient de son terme de plus haut degré est égal à 1.

La question 1 est classique et servira surtout à fixer quelques notations ; la question 2 n'est pas utilisée dans la suite.

Première partie

On désigne par $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, par α un nombre complexe non nul, par $\mathbb{K}[a]$ le sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par les nombres α^n, $n = 0, 1, 2, ...$, enfin par $I_{\mathbb{K}}(\alpha)$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ annulés par α.

1. a) Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

$$\text{(i) } \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[\alpha]) < +\infty$$

$$\text{(ii) } I_{\mathbb{K}}(\alpha) \neq \{0\}.$$

Si elles sont remplies, on dit que α est $\mathbb{K}$-*algébrique*, ce que l'on suppose dans la suite de cette question.

b) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que tout élément de $I_{\mathbb{K}}(\alpha)$ soit un multiple de P, et que P est irréductible.
Ce polynôme P sera noté $P_{\mathbb{K}}(\alpha)$ et appelé *polynôme* $\mathbb{K}$-*minimal* de α.

c) Comparer le degré de $P_{\mathbb{K}}(\alpha)$ et $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[\alpha])$.

d) Montrer que $\mathbb{K}[a]$ est un corps.

2. Applications numériques. On prend $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

a) Déterminer le polynôme $\mathbb{Q}$-minimal de $\alpha = \sqrt{2}$.

b) Déterminer le polynôme $\mathbb{Q}$-minimal de $\alpha = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Deuxième partie

On définit $\mathbb{K}$ et α comme dans la première partie. On suppose que α est $\mathbb{K}$-algébrique et on pose $n = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[\alpha])$.

1. Montrer que, si P est un élément irréductible de $\mathbb{K}[X]$, ses zéros dans $\mathbb{C}$ sont tous simples.

2. a) On note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les zéros de $P_{\mathbb{K}}(\alpha)$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que pour tout $i = 1, ..., n$, il existe un unique morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres σ_i de $\mathbb{K}[\alpha]$ dans $\mathbb{C}$ tel que $\sigma_i(a) = \lambda_i$.

b) Obtient-on de cette façon tous les morphismes de $\mathbb{K}$-algèbres de $\mathbb{K}[\alpha]$ dans $\mathbb{C}$?

3. Montrer que si β est un élément de $\mathbb{K}[\alpha]$ et si les $\sigma_i(\beta)$ sont deux à deux distincts, alors on a $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}[\beta]$.

4. Étant donné un élément β de $\mathbb{K}[\alpha]$, démontrer l'existence de deux éléments β_1 et β_2 de $\mathbb{K}[\alpha]$ vérifiant $\mathbb{K}[\beta_1] = \mathbb{K}[\beta_2] = \mathbb{K}[\alpha]$ et $\beta_1 + \beta_2 = \beta$.
On pourra introduire, pour $i \neq j$, l'ensemble $E_{i,j}$ des éléments λ de $\mathbb{K}$ vérifiant

$$\sigma_i(\alpha + \lambda\beta) = \sigma_j(\alpha + \lambda\beta).$$

Fin de l'épreuve