Centre Ibn Abdoune
des Classes Préparatoire
aux Grandes Écoles
Khouribga

Année scolaire : 2014/2015
Filière **MP**

Devoir surveillé commun n°2

18/10/2014

durée : 4 heures

••••••••

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

Problème I

On considère l'espace vectoriel $\mathscr{B}$ des applications définies et bornées sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et l'espace $\mathscr{C}$ des applications définies et continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Partie I

1. Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{B}$.

2. Pour toute fonction f de $\mathscr{B}$, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(x)|.$$

Démontrer que l'application $f \mapsto \|f\|_\infty$ est un norme sur $\mathscr{B}$.

3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathscr{B}$ pour la norme $\|.\|_\infty$.

a) Démontrer que, $\forall x \in [0,1]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{R}$.

b) On pose $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Démontrer que l'on définit ainsi une application f qui appartient à $\mathscr{B}$.

c) Démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.
En déduire que l'espace vectoriel $\mathscr{B}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ est complet.

4. Démontrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{B}$. En déduire que l'espace vectoriel $\mathscr{C}$ est complet pour la norme $\|.\|_\infty$

Partie II

1. Pour toute fonction f de $\mathscr{C}$, on pose

$$I(f) = \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Démontrer que l'application $I :\ f \mapsto I(f)$ est un norme sur $\mathscr{C}$.

2. **a)** Démontrer qu'il existe un réel $k > 0$ tel que

$$\forall f \in \mathscr{C}, \quad I(f) \leq k\|f\|_\infty.$$

b) Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} nx^2 & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right], \\ -n^2x + 2n & \text{si } \quad x \in \left]\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right], \\ 0 & \text{si } x \in \left]\dfrac{2}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Vérifier que $f_n \in \mathscr{C}$, puis calculer $\|f_n\|_\infty$ et $I(f_n)$.

c) En déduire que les deux normes $\|.\|_\infty$ et I ne sont pas équivalentes sur $\mathscr{C}$.

3. Pour chaque entier $n \geq 2$, on considère la fonction g_n de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par ;

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \\ nx - \dfrac{n}{2} & \text{si } \quad x \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\right], \\ 1 & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

a) Verifier que $\forall n \geq 2$, $g_n \in \mathscr{C}$, puis, pour $p \geq n \geq 2$, calculer $I(g_p - g_n)$. En déduire que $(g_n)_{n \geq 2}$ est une suite de Cauchy de $\mathscr{C}$ pour la norme I.

b) Démontrer que $\mathscr{C}$ muni de la norme I n'est pas complet.

Problème II

Objectifs : Le but du problème est d'étudier, dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, la distance d'un vecteur à un hyperplan.
Dans la partie I, on étudie un exemple dans l'ensemble $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
Dans la partie II, on étudie le cas de la dimension finie, puis on montre que les hyperplans sont fermés ou denses.
Dans la partie III, on étudie le cas des hyperplans denses.
Les quatre parties sont, dans une large mesure, indépendantes.
On rappelle la définition suivante : *On dit qu'un sous-espace H d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E quelconque est un hperplan, s'il existe une forme linéaire φ non nulle de E telle que $H = \operatorname{Ker} \varphi$. Ceci est équivalent à dire que $\forall a \in E \backslash H$, on a $E = H \oplus \mathbb{K}a$.*

Partie I

$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n \geq 2$, à coefficients réels, on le munit du produit scalaire défini par :

$$(A|B) = \operatorname{tr}({}^tAB)$$

où A et B sont deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tA$ est la transposée de la matrice A et $\operatorname{tr}({}^tAB)$ est la trace de la matrice ${}^tAB$. Soit $F = (f_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{cases} f_{i,i} = 1, & \text{pour } 1 \leq i \leq n \\ f_{i,1} = 1, & \text{pour } 2 \leq i \leq n \\ f_{i,n} = 1, & \text{pour } 1 \leq i \leq n-1 \\ f_{i,j} = 0, & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

On note H l'ensemble des matrices X de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $(F|X) = 0$.

1. Montrer que H est un hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On note $X = (x_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$, exprimer $(F|X)$ en fonction des $x_{i,j}$.

3. On rappelle que la distance d'une matrice M de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ à l'hyperplan H est définie par : $d(M, H) = \inf\limits_{U\in H} ||M - U||$ où la norme $||.||$ est la norme associée au produit scalaire $(.|.)$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $d(M, H) = \frac{|(F|M)|}{||F||}$.

4. Calculer $||F||$ en fonction de n.

5. On note $B = F - I_n$, où I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

a) Déterminer le rang de B.

b) Calculer B^2, montrer que B^2 et B ont le même rang.

c) On appelle g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, tel que la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ soit la matrice B. On rappelle que $\text{Ker } g$ et Img désignent respectivement, le noyau et l'image de l'endomorphisme g.
Montrer que : $\mathbb{R}^n = \text{Ker } g \oplus \text{ Im}g$

d) En déduire que la matrice B est semblable à une matrice du type

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$$

où B' est une matrice carrée d'ordre 2 inversible.

e) Calculer les traces de B et de B^2, en deduire les valeurs propres de B'.

f) En déduire les valeurs propres de F ainsi que la dimension des sous-espaces propres associés.

6. Soit P un polynôme à coefficients réels de degré $k \geq 0$, de la forme $P = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i X^i$, on définit $P({}^tF)$ par :

$$P({}^tF) = a_0 I_n + \sum_{i=1}^{k} a_i({}^tF)^i$$

Calculer la distance de la matrice $P({}^tF)$ à l'hyperplan H en fonction de P. On pourra utilement poser : $S(X) = XP(X)$ et calculer : $S({}^tF)$.

Partie II

H est un hyperplan d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E, h est une forme linéaire non nulle sur E, dont le noyau est égal à H.

1. Dans cette question, E est de dimension finie, on désigne par x_0 un vecteur de E.

a) On note $d(x_0, H)$ la distance de x_0 à l'hyperplan H. Montrer qu'il existe une suite $(y_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de H tels que :

$$\lim_{n\to+\infty} ||x_0 - y_n|| = d(x_0, H).$$

b) Montrer qu'il existe une suite $(y_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ extraite de la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ qui converge vers un élément de H.

c) En déduire qu'il existe y_0 appartenant à l'hyperplan H tel que : $d(x_0, H) = ||x_0 - y_0||$. On dit que la distance de x_0 à l'hyperplan H est atteinte en y_0.

2. On suppose dans cette question que E est de dimension quelconque.

a) Montrer que si h est une forme linéaire continue sur E alors le noyau, $Ker h$, est fermé dans E.

b) Montrer que si le noyau, $Ker h$ de h est fermé alors h est continue. On pourra montrer que, si h n'est pas continue, alors il existe une suite $(t_n)_{n\geq 0}$ de E telle que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0 \\ h(t_n) = 1, \text{ pour tout entier } n \end{cases}$$

Puis , on utilisera la suite $(t_n - t_0)_{n\geq 0}$ pour mettre en évidence une contradiction.

c) Montrer que si H est un hyperplan de E alors l'adhérence $\bar{H}$ de H est un sous-espace vectoriel de E.

d) En déduire que tout hyperplan de E est fermé ou dense, c'est-à-dire $\bar{H} = H$ ou $\bar{H} = E$.

Partie III

On suppose dans cette partie que E est un espace préhilbertien muni du produit scalaire :

$$(.|.) : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & (x|y) \end{array}$$

et que H est un hyperplan dense de E, c'est-à-dire $\bar{H} = E$.

1. Déterminer $H^{\perp}$, l'orthogonal de H.

2. Que dire de $H \oplus H^{\perp}$?

3. Pour tout vecteur x de E, calculer la distance $d(x, H)$.

4. La distance $d(x, H)$ est-elle toujours atteinte ? Justifier.

FIN DE L'ÉPREUVE