Centre Ibn Abdoune
des Classes Préparatoires
aux Grandes Écoles
Khouribga

Année scolaire : 2014/2015
Filière **MP**

Devoir surveillé commun n°3

22/11/2014

durée : 4 heures

• • • • • • • • •

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

• • • • • • • • •

Exercice

On pose $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x > 0\}$. On pose

$$r = r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad t = t(x, y) = \frac{y}{x}.$$

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ de Ω dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ (x, y) & \longmapsto & (r(x, y), t(x, y)) \end{array}$$

est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme. Puis calculer la matrice jacobienne de Φ.

2. Pour tout fonction $f \in E$, on pose $g(r, t) = f(x, y)$ où $(r, t) = \Phi(x, y)$. Vérifier que $g \in E$.

3. Pour tout $f \in E$, on note Tf l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad Tf(x, y) = x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Montrer que T est un endomorphisme de E.

4. Soit $f \in E$. Exprimer Tf à l'aide de $r, t, \dfrac{\partial g}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial t}$.

5. En déduire le noyau E_0 de T.

6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λ est une valeur propre de T et déterminer E_λ le sous-espace propre de T associé à la valeur propre de λ.

Problème

Notations. On considère dans tout le problème un espace vectoriel E dc dimension finie n sur C. On note. I_E l'application identique de E dans E et $\mathscr{L}(E)$ I'enscmble des endomorphismes de E.
On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{C}$ et I_n la matrice unité d'ordre n. Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et si F est un sous-espace vectoriel de E on dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$.
Les deux parties sont indépendantes.

Partie I

Dans cette partie, u désigne un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

1. Montrer qu'il existe une base de E sur laquelle la matrice de u est diagonale.

2. Soit $P = \sum_{i=0}^{N} a_i X^i$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et v I'endomorphisme de E défini par :

$$v = P(u) = \sum_{i=0}^{N} a_i u^i = a_N u^N + ... + a_1 u + a_0 I_E.$$

a) Montrer que $u \circ v = v \circ u$.

b) Montrer que v est diagonalisable.

c) Calculer les valeurs propres de v et son déterminant en fonction des valeurs propres de u.

3. *Application* : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

deux matrices de $\mathscr{M}_5(\mathbb{C})$.

a) Déterminer les valeurs propres de A .

b) Montrer qu'il existe cinq complexes a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, tels que :

$$B = a_0 I_5 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 + a_4 A^4.$$

En déduire les valeurs propres de B et une expression du déterminant de B.

c) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^5 = 1$ et $z \neq 1$. Simplifier :

$$(z-1)(5z^5 + 4z^4 + 3z^3 + 2z^2 + z).$$

d) En déduire que $\det B = 3 \times 5^4$.

4. Soit v un endomorphisme de E tel que $u \circ v = v \circ u$. On note $(e_1, ..., e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u.

   a) Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, il existe $\mu_i \in \mathbb{C}$ tel que $v(e_i) = \mu_i e_i$.

   b) Soit n nombres complexes fixés, notés $\mu_1, ..., \mu_n$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ de degré strictement inférieur à n tel que :
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad P(\lambda_i) = \mu_i.$$
   (Pour rechercher un tel polynôme P, on pourra considérer l'application définie par :
$$\varphi : \begin{array}{ll} \mathbb{C}_{n-1}[X] & \longrightarrow \mathbb{C}^n \\ P & \longmapsto (P(\lambda_1), ..., P(\lambda_n)) \end{array}$$

   c) Déduire des questions précédentes qu'il existe un polynôme P de degré strictement inférieur à n tel que $v = P(u)$.

5. Soit $\mathscr{C}_u = \{v \in \mathscr{L}(E) \text{ tel que } u \circ v = v \circ u\}$.

   a) Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
      i. $v \in \mathscr{C}_u$;
      ii. il existe une base de E sur laquelle les matrices de u et v sont diagonales ;
      iii. il existe un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ de degré strictement inférieure à n tel que $v = P(u)$.

   b) Montrer que $\mathscr{C}_u$ est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative. Quelle est sa dimension ?

6. *Application* : Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

   a) Déterminer les valeurs propres de A et une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

   b) On se propose de chercher les matrices B telles que :
$$(1) \quad B^3 = A.$$
   Montrer que si B vérifie(1) alors $BA = AB$.
   En déduire toutes les solutions de (1) .

Partie II

Dans cette partie E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n = 3$, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ désigne une base de E.

Considérons deux endomorphismes diagonalisables u et v de E tels que $u \circ v = v \circ u$. On pose :
$$A = \text{Mat}\,(u, \mathscr{B}) \;\text{ et }\; B = \text{Mat}\,(v, \mathscr{B})\,.$$
μ étant une valeur propre de u, $E_\mu(u)$ désigne le sous-espace propre de u associé à la valeur propre μ de u.
λ étant une valeur propre de v, $E_\lambda(v)$ désigne le sous-espace propre de v associé à la valeur propre λ de v.

1. λ étant une valeur propre de v, x appartenant à $E_\lambda(v)$, montrer que :

$$v\left(u\left(x\right)\right) = \lambda u\left(x\right),$$

et en déduire que $u\left(x\right)$ appartient à $E_\lambda(v)$.

2. Nous supposons dans cette question que v admet une unique valeur propre λ.

a) Montrer que : $v = \lambda \mathrm{Id}_E$, Id_E représentant l'endomorphisme identité.

b) Justifier alors l'existence d'une matrice P inversible appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que les matrices $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

3. Nous supposons dans cette question que v admet trois valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

a) λ étant une valeur propre de v, quelle est la dimension de $E_\lambda(v)$?

b) λ étant une valeur propre de v, x un vecteur non nul appartenant à $E_\lambda(v)$, montrer qu'il existe un réel μ tel que : $u\left(x\right) = \mu x$.

c) Montrer alors l'existence d'une base de E constituée de vecteurs propres communs à u et v.

4. Nous supposons dans cette question que v admet deux valeurs propres distinctes λ_1, λ_2.

a) Montrer que : $E = E_{\lambda_1}(v) \oplus E_{\lambda_2}(v)$.

b) μ désigne une valeur propre de u.
Soit x appartenant à $E_\mu(u)$, justifier l'existence de x_1 appartenant à $E_{\lambda_1}(v)$ et de x_2 appartenant à $E_{\lambda_2}(v)$ tels que : $x = x_1 + x_2$, puis montrer que x_1 et x_2 appartiennent à $E_\mu(u)$.

c) μ désigne toujours une valeur propre de u.
Montrer alors que : $(E_\mu(u) \cap E_{\lambda_1}(v)) \oplus \left(E_\mu(u) \cap E_{\lambda_2(v)}\right) = E_\mu(u)$.
En déduire l'existence d'une base de $E_\mu(u)$ constituée de vecteurs propres de v.

d) En déduire l'existence d'une base de E constituée de vecteurs propres communs à u et v.

Fin de l'épreuve