Centre Ibn Abdoune
des Classes Préparatoires
aux Grandes Écoles
Khouribga

Année scolaire : 2014/2015
Filière **MP**

Devoir surveillé commun n°5

07/02/2015
durée : 4 heures

••••••••

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

••••••••

EXERCICE

On désigne par $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles, définies et continues sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et on associe à chaque f de $\mathscr{C}$ la suite des nombres :

$$c_k(f) = \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)x^k \mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{N}.$$

1. On désigne par f une fonction de $\mathscr{C}$ et par F la primitive de f qui s'annule pour la valeur $\dfrac{-1}{2}$.
   Calculer $c_k(F)$ en fonction des nombres $c_k(f)$ et montrer que si P est un polynôme à coefficients réels, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)P(x)\mathrm{d}x$ s'exprime en fonction des nombres $c_k(f)$.

2. Soient a et h deux nombres réels tels que $0 < h \leq \dfrac{1}{2}$ et $h \leq a \leq 1 - h$. On définit la fonction ϕ_h sur $[-1, 1]$ par $\phi_h(t) = \dfrac{1 - t^2}{1 - h^2}$.
   (a) Étudier rapidement les variations de ϕ_h et tracer son graphe.
   (b) Déterminer, pour tout nombre $t \in [-1, 1]$, la limite de la suite de terme général $u_n(t) = [\phi_h(t)]^n$.
   En déduire la limite de la suite de terme général $v_n(a) = \displaystyle\int_{a-1}^{a} [\phi_h(t)]^n \mathrm{d}t$.

(c) On désigne par g une fonction à valeurs réelles et continue dans $[a-1,a]$, minorée dans $[-h,h]$ par un nombre m strictement positif.
Montrer que $\displaystyle\int_{a-1}^{a} g(t)[\phi_h(t)]^n \mathrm{d}t$ est strictement positive dès que n est assez grand.

3. (a) Montrer que si f est un élément de $\mathscr{C}$ et si $f(0)$ n'est pas nul, les nombres $c_k(f)$ ne sont pas tous nuls. (*on pourra étudier pour une valeur convenable de h, l'intégrale* $\displaystyle\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t)[\phi_h(t)]^n \mathrm{d}t$)
En déduire que si f n'est pas nulle pour une valeur x_0 de $\left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$, alors les nombres $c_k(f)$ ne sont pas tous nuls.
(b) Montrer que l'application qui à toute fonction f de $\mathscr{C}$ associe la suite $(c_k(f))_{k\in\mathbb{N}}$ est injective.

Problème : Équation de Gauss

Partie I : Quelques résultats préliminaires

On considère dans cette partie les fonctions F et G définis par :

$$F:\quad \begin{array}{ccl}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-x^2\sin\theta}} \end{array}$$

et

$$G:\quad \begin{array}{ccl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+x^2\sin^2\theta}} \end{array}$$

1. (a) Vérifier que F et G sont bien définies.
(b) Donner, pour $x\in]0,1[$, une relation entre $G(x)$ et $F(\sqrt{1-x^2})$.

2. On pose, pour $x>0$, $K(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+x^2\cos^2\theta}}$

(a) Montrer que l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta$ et convergente et calculer sa valeur.
(b) Montrer que la fonction $h:\ \mathbb{R}_+\times\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ \ (x,\theta)\mapsto \dfrac{1-\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+x^2\cos^2\theta}}$, pour $(x,\theta)\neq(0,0)$, et $h(0,0)=0$ est continue.

(c) Montrer, en le justifiant avec précision, que $\lim_{x \to 0}(G(x) - K(x)) = \frac{2}{\pi} I$.

(d) Calculer $K(x)$ pour $x > 0$. En déduire que $G(x) = -\frac{2}{\pi} \ln x + 4\frac{\ln 2}{\pi} + 0_+(1)$ ($o_+(1)$ *désigne une fonction qui tend vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs supérieures*).

(e) Calculer $\lim_{x \to +\infty} G(x)$.

3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $w_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$. On rappelle que pour $n \in \mathbb{N}$, $w_{2n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2n} t dt$.
Montrer que F est développable en série entière. On exprimera les coefficients de ce développement en fonction des w_{2n}.

4. Tracer la courbe représentative de F.

5. Soit F_1 (resp G_1) la restriction de F (resp G) à l'intervalle $]0, 1[$. Montrer que F_1 et G_1 ne sont pas proportionnelles.

Partie II : Solutions de l'équation de Gauss

On va maintenant, en utilisant les résultats de la partie précédente, étudier les solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{S})$ suivante appelée *équation de Gauss* :

$$(\mathscr{S}) \quad (x^3 - x)y'' + (3x^2 - 1)y' + xy = 0.$$

On appelle I-solution de $(\mathscr{S})$, pour I intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial, tout fonction f définie sur I vers $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in I, \quad (x^3 - x)f''(x) + (3x^2 - 1)f'(x) + xf(x) = 0.$$

Pour f définie sur un intervalle I et de classe $\mathscr{C}^2$, on pose :

$$\mathscr{L}(f) : \begin{array}{ll} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto (x^3 - x)f''(x) + (3x^2 - 1)f'(x) + xf(x) \end{array}$$

1. On suppose f définie sur un intervalle $]-R, R[$, $R > 0$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, avec $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.
Montrer que $\mathscr{L}(f)(x)$ s'écrit sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, où $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite que l'on déterminera en fonction de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Chercher les solutions de $(\mathscr{S})$ développables en série entière au voisinage de 0. Donner le rayon de convergence des séries trouvées. Exprimer les solutions trouvées en fonction de F.

3. Vérifier que si f est une $]0,1[$-solutions de $(\mathscr{S})$, alors la fonction

$$g: \begin{array}{ccl}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f\left(\sqrt{1-x^2}\right) \end{array}$$

   est encore une $]0,1[$-solutions de $(\mathscr{S})$.

4. Donner les I-solutions de $\mathscr{S}$ avec $I =]0,1[$, puis $I =]-1,0[$ et enfin $I =]-1,1[$.

5. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial et ne contenant pas 0. On pose $J = \left\{\dfrac{1}{x} / x \in I\right\}$.
   Montrer que y est une I-solution de $(\mathscr{S})$ si, et seulement si, Y définie de J vers $\mathbb{R}$ par $Y(t) = y\left(\dfrac{1}{t}\right)$ est solution d'une équation différentielle $(\mathscr{E})$ de la forme

$$A(t)Y''(t) + B(t)Y'(t) + Y(t) = 0,$$

   où A et B sont deux fonctions polynômes à préciser.

6. Vérifier que si f est une J-solution de $(\mathscr{S})$, alors la fonction

$$g: \begin{array}{ccl} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & tf(t) \end{array}$$

   est une J-solution de $(\mathscr{E})$.

7. Déduire des questions précédentes, mais sans chercher à intégrer $(\mathscr{E})$, les $]1,+\infty[$-solutions et les $]-\infty,-1[$-solutions de $(\mathscr{S})$.

8. Montrer que l'ensemble des $]0,+\infty[$-solutions de $(\mathscr{S})$ est Vect(G).

9. Donner les les $]-1,+\infty[$-solutions et enfin les $\mathbb{R}$-solutions de $(\mathscr{S})$.

FIN DE L'ÉPREUVE