Centre Ibn Abdoune
des Classes Préparatoires
aux Grandes Écoles
Khouribga

Année scolaire : 2014/2015
Filière **MP**

Devoir surveillé commun n°6

14/03/2015
durée : 4 heures

••••••••

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

••••••••

EXERCICE

Soit un réel α. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha 2^{x} & \text{si } x < 0, \\ \alpha 2^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Déterminer α pour que f soit la densité d'une variable aléatoire X à valeurs réelles.
   Dans la suite de l'exercice on prend $\alpha = \dfrac{\ln 2}{2}$.
2. (a) Calculer, si elle existe, l'espérance de X.
   Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.
   Tracer la courbe représentative de F.

   (b) Soit un nombre réel x. Calculer la probabilité conditionnelle de l'événement $(X < x)$ sachant que l'événement $(X \geq -1)$ est réalisé.
3. Déterminer la fonction de répartition G de la variable aléatoire $Y = 2^{\frac{X}{2}}$.

PROBLÈME I

Première partie

Une urne contient 7 boules : 5 boules blanches et 2 boules noires. Un joueur extrait simultanément deux boules de l'urne.

1. Calculer la probabilité qu'il tire deux boules blanches.

2. Le joueur participe maintenant au jeu suivant :
   • s'il tire deux boules blanches il gagne x francs $(x \geq 0)$;
   • s'il tire deux boules noires il perd $10x$ francs ;
   • s'il tire une boule blanche et une boule noire, il procède à un second tirage de deux boules, sans remettre les deux premières boules tirées :

      à l'issue de ce second tirage il gagne y francs s'il tire deux boules blanches, sinon il perd 3 francs.

   On désigne par G la variable aléatoire dont les valeurs sont égales aux gains (positifs ou négatifs) du joueur.

   (a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire G.
   (b) Calculer, en fonction de y, l'espérance mathématique de la variable aléatoire G. Déterminer y pour que le jeu soit équitable, c'est à dire $E(G) = 0$.
   (c) Pour cette valeur de y, calculer l'écart-type $\sigma(G)$ de la variable G en fonction de x.

Deuxième partie

Soit la fonction f, définie pour tout réel x, par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{110x^2 + 60}{21}}.$$

1. Déterminer le réel α tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \alpha x] = 0$.

   Quel est le signe de $f(x) - \alpha x$ pour $x \geq 0$?

2. Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative (C) et ses asymptotes dans un repère orthonormé (unité : $1.5\ cm$).

3. Déterminer l'entier naturel x pour lequel l'écart-type $\sigma(G)$ de la première partie est compris entre 7 et 8.

PROBLÈME II

Dans tout le problème, f désigne la fonction de la variable complexe z définie par :

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1}.$$

I- DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE DE LA FONCTION TANGENTE

Pour tout x reel dans l'intervalle ouvert $I = \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose : $g(x) = \tan(x)$. La dérivée d'ordre n de g en x est ici notée $g^{(n)}(x)$, avec la convention $g^{(0)}(x) = g(x)$.

1. (a) Exprimer $g'(x)$ en fonction de $g^2(x)$.
   Montrer que si n est un entier naturel non nul ,

$$g^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathtt{C}_n^k g^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

   (b) En déduire que pour tout entier n et pour tout reel x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $g^{(n)}(x) > 0$.

2. On pose $a_n = \frac{1}{n!} g^{(n)}(0)$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x_k$ et $R_n(x) = g(x) - S_n(x)$. Pour tout $x \in I$, justifier la formule :

$$g(x) = S_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n g^{(n+1)}(xu) \mathrm{d}u.$$

3. (a) Pour tous $0 \leq x < y < \frac{\pi}{2}$, prouver que : $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y)$.

   (b) Prouver également que : $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} g(y)$.

4. En déduire que, pour tout $x \in I$, on a : $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Que peut-on dire de a_{2p} pour tout entier naturel p ?

5. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$? (On pourra utiliser la régularité de la fonction g)

II- DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE DE LA FONCTION f

1. Préciser le domaine de définition de f et montrer que f se prolonge par continuité en 0. On notera encore f ce prolongement.

2. On suppose que f admet un développement en série entière sur un disque de centre 0 et de rayon non nul $r' > 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

   (a) En remarquant que $f(z)(e^z - 1) = z$, montrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie $b_0 = 1$ et pour $n \geq 1$ la relation

$$b_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{(n-k+1)!}.$$

   (b) Calculer b_1, b_2 et b_3.

   (c) Montrer que pour tout entier naturel n , $|b_n| \leq 1$.

   (d) Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ est supérieur ou égal à 1.

3. En déduire que f est developable en série entière sur $D_R = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$.

On appelle nombres de Bernoulli les nombres reels B_n définis pour tout entier n par $B_n = n!\, b_n$.

4. (a) Exprimer $1 + \dfrac{f(4z) - f(2z)}{z}$ en fonction de e^{2z}.

   (b) En déduire l'expression en fonction des B_n du développement en série entière de la fonction tangente.
   Que vaut B_{2n+1} pour tout $n \geq 1$? Quelle est la valeur de R ?

III- LES POLYNÔMES DE BERNOULLI

On note F la fonction définie par $F(z,t) = e^{zt} f(z)$ où t est un reel et z un nombre complexe.

1. Montrer que pour tout reel t et pour tout z dans D_R :

$$F(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \frac{z^n}{n!}$$

   ou $t \mapsto P_n(t)$ est une fonction polynomiale que l'on exprimera à l'aide des nombres de Bernoulli B_k.
   La famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la famille des polynômes de Bernoulli.

2. Écrire P_0, P_1, P_2 et P_3.

3. Calculer $P_n(0)$ en fonction de B_n.

4. En calculant $F(z,t+1) - F(z,t)$ de deux manières différentes, montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$P_n(t+1) - P_n(t) = nt^{n-1}.$$

5. En déduire pour tout entier naturel p, une expression de $S_p = \sum_{k=1}^{p} k^p$ à lŠaide des polynômes de Bernoulli.

6. Démontrer que pour tout réel t et tout entier n dans $\mathbb{N}$, $P_n(1-t) = (-1)^n P_n(t)$.

7. (a) Établir que pour tout reel t et pour tout reel r dans $]0, R[$:

$$\int_0^{2\pi} F(re^{i\theta}, t) e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta = 2\pi r^n \frac{P_n(t)}{n!}.$$

   b) En justifiant la dérivabilité de chacun des deux membres obtenu au (**a**), démontrer que pour tout entier naturel n strictement positif et pour tout reel t :

$$P'_n(t) = nP_{n-1}(t).$$

FIN DE L'ÉPREUVE