Devoir libre n°1

CORRECTION

• • • • • • • • •

Exercice 1

1. (a) Supposons $\sup(A) \leq \sup(B)$. Si $x \in A \cup B$, on a soit $x \in A$ et $x \leq \sup(A) \leq \sup(B)$, soit $x \in B$ et $x \leq \sup(B)$, il en résulte que $\sup(A \cup B) \sup(B)$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver $x \in B \subset A \cup B$ tel que $\sup(B) - \varepsilon < x \leq \sup(B)$. On a donc $\sup(A \cup B) = \sup(B)$.
   (b) On montre de manière analogue que $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$.
   (c) Supposons que $A \subset B$. Pour tout $x \in A$, on a $x \in B$ et $\inf(B) \leq x \leq \sup(B)$, ce qui entraîne, par définition des bornes supérieure et inférieure, $\inf(B) \leq \inf(A)$ et $\sup(A) \leq \sup(B)$.
2. Notons $M = \sup(A)$ et $M' = \sup(B)$. Pour tout $z = x+y$ avec $x \in A$ et $y \in B$, on a l'inégalité : $z = x+y \leq M+M'$. L'ensemble $A+B$ est donc non vide et majoré et en conséquence admet une borne supérieure M'' avec $M'' \leq M+M'$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver $x \in A$ et $y \in B$ tel que $M - \frac{\varepsilon}{2} < x \leq M$ et $M' - \frac{\varepsilon}{2} < y \leq M'$, ce qui nous donne $z = x+y \in A+B$ tel que
$$M + M' - \varepsilon < z \leq M + M'.$$
le réel $M + M'$ est donc la borne supérieure de $A + B$.
3. Notons $m = \inf(A)$ et $M = \sup(A)$. Soit $x \in A$; on a
$$m \leq x \leq M$$
D'où
$$-M \leq -x \leq -m.$$
Par suite $-A$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ et
$$-M \leq \inf(-A) \leq \sup(-A) \leq -m.$$
Puisque $-(-A) = A$, on en déduit que
$$-\sup(-A) \leq m \leq M \leq -\inf(-A).$$
D'où
$$\inf(-A) = -M \ \ et \ \ \sup(-A) = -m.$$
4. En séparant les entiers pairs et les entiers impairs, on a : $A = A_1 \cup A_2$ avec :
$$A_1 = \left\{1 + \frac{1}{2p} / p \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad \left\{-1 + \frac{1}{2p+1} / p \in \mathbb{N}\right\}.$$
On vérifie facilement que $\inf(A_1) = 1 \notin A_1$, $\sup(A_2) = \frac{3}{2} \in A_1$, $\inf(A_2) = -1 \notin A_2$, $\sup(A_2) = 0 \in A_2$, soit :
$$\sup(A) = \max(\sup(A_1), \sup(A_2)) = \frac{3}{2} \in A,$$
$$\inf(A) = \min(\inf(A_1), \inf(A_2)) = -1 \notin A.$$

Exercice 2 Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1,$$

alors

$$\frac{-n}{n+1} < \frac{n\cos(n)}{n+1} \leq \frac{n}{n+1}.$$

Comme $0 \leq \dfrac{n}{n+1} < 1$, on a

$$-1 < \frac{n\cos(n)}{n+1} < 1.$$

Par suite, A est bornée, donc, il admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Exercice 3 Il est clair que $0 \leq \sqrt[n]{a} - 1$. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} a &= (\sqrt[n]{a} - 1 + 1)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathtt{C}_n^k (\sqrt[n]{a} - 1)^k \\ &= 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1) + \sum_{k=2}^{n} \mathtt{C}_n^k (\sqrt[n]{a} - 1)^k \\ &\geq 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1). \end{aligned}$$

D'où $0 \leq \sqrt[n]{a} - 1 \leq \dfrac{a-1}{n}$ et d'après le théorème d'encadrement $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Exercice 4 D'après le formule de binôme, on a :

$$\begin{aligned} (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n &= \sum_{k=0}^{n} \mathtt{C}_n^k 3^{n-k}\sqrt{5}^k + \sum_{k=0}^{n} \mathtt{C}_n^k (-1)^k 3^{n-k}\sqrt{5}^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathtt{C}_n^k 3^{n-k}\sqrt{5}^k (1-(-1)^k) = 2p \end{aligned}$$

avec $p \in \mathbb{N}$.
Ainsi $\sin[(3+\sqrt{5})^n] = -\sin[(3-\sqrt{5})^n]$ et comme $0 \leq 3-\sqrt{5} < 1$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty}(3-\sqrt{5})^n = 0$ et par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} \sin[(3-\sqrt{5})^n] = 0.$$

Exercice 5 UNICITÉ : Si x_1 et x_2 sont deux éléments de $\mathbb{R}^+$ tels que $x_1^n = x_2^n$, alors

$$x_1^n - x_2^n = (x_1 - x_2)(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_2 + ... + x_1 x_2^{n-1} + x_2^{n-1}$$

Or, on a

$$(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_2 + ... + x_1 x_2^{n-1} + x_2^{n-1}) > 0,$$

donc $x_1 = x_2$.
EXISTENCE : Considérons l'ensemble

$$A = \{z \in \mathbb{R},\ \ z^n \leq y\}$$

Comme $0 \in A$, alors A est non vide. Montrons que A est majorée. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a > 1$, puisque $\mathbb{R}$ est archimédien alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que :

$$m(a^n - 1) > y.$$

Or, on a

$$(a^n)^m - 1 = (a^n - 1)((a^n)^{m-1} + (a^n)^{m-2} + ... + a^n + 1).$$

Donc $(a^n)^m - 1 > (a^n - 1)m > y$. D'où

$$(a^n)^m = (a^m)^n > y.$$

L'élément a^m est un majorant de A, en effet, si $z \in A$ vérifiant $z > a^m$, alors $z^n > (a^m)^n > y$, ceci contredit le fait que $z \in A$. Il résulte don que l'ensemble A admet une borne supérieure, que l'on note x. Si $x \neq 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq n_0$, on ait :

$$x - \frac{1}{k} \in A \text{ et } x + \frac{1}{k} \notin A.$$

Donc

$$\left(x - \frac{1}{k}\right)^n \leq y \text{ et } \left(x + \frac{1}{k}\right)^n > y.$$

Par suite

$$\left(x - \frac{1}{k}\right)^n - x^n \leq y - x^n < \left(x + \frac{1}{k}\right)^n - x^n$$

pour tout $k \leq n_0$. Puisque l'on a :

$$\left(x - \frac{1}{k}\right)^n - x^n = \frac{-1}{k}\left(\left(x - \frac{1}{k}\right)^{n-1} + ... + \left(x - \frac{1}{k}\right)x^{n-1} + x^{n-1}\right)$$

et

$$\left(x + \frac{1}{k}\right)^n - x^n = \frac{1}{k}\left(\left(x + \frac{1}{k}\right)^{n-1} + ... + \left(x + \frac{1}{k}\right)x^{n-1} + x^{n-1}\right)$$

et qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \ k \geq n_1 \Longrightarrow \frac{1}{k} \leq x,$$

alors

$$\frac{-n}{k}x^{n-1} < y - x^n < \frac{n}{k}(2x)^{n-1}$$

pour tout $k \geq k_0 = \max(n_0, n_1)$. Si l'on a $y - x^n > 0$, alors

$$k < \frac{n(2x)^{n-1}}{y - x^n}, \ \ \forall k \geq k_0,$$

ceci contredit le fait que $\mathbb{N}$ n'est pas majoré. Si l'on a $y - x^n < 0$, alors

$$k < \frac{nx^{n-1}}{x^n - y}, \ \ \forall k \geq k_0,$$

on obtient la même contradiction.
Il en résulte que

$$x^n = y.$$

••••••••••