Exercice 1

1. u_n peut s'écrire aussi sous la forme d'une somme de Riemann :
$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$
avec $f(x) = x^2\sin(\pi x)$, donc d'après le résultat cours :
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \int_0^1 x^2\sin(\pi x)dx = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}.$$

2. De même $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f(x) = \frac{1}{a+bx}$, donc $\lim_{n\to\infty} u_n \int_0^1 \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)$.

3. La méthode précédente ne s'applique pas pour cette exemple (la somme varie de 1 à $n-1$ et non de 1 à n). On a
$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(k),$$
avec $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
D'autre part et puisque f est croissante, pour tout $i = 1, 2, ..., n-1$, on a l'inégalité :
$$\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right).$$
Ainsi $\sum_{i=1}^{n-1}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = u_n$, et donc $\int_0^{\frac{n-1}{n}} f(t)dt \leq u_n$.
De même
$$\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n-1}{n}} f(t)dt.$$
et donc
$$u_n - \frac{1}{n}f\left(\frac{n-1}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n-1}{n}} f(t)dt.$$
D'où
$$\arcsin\left(\frac{n-1}{n}\right) \leq u_n \leq \arcsin\left(\frac{n-1}{n}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}},$$
et par conséquent $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2

1. Soit $f_n \in E$ définie par : $f(x) = e^{nx}$. On a $\varphi(f_n) = \frac{4}{n^2}\text{sh}^2\left(\frac{n(b-a)}{\varphi 2}\right)$, quantité qui tend vers l'infini quand n tend vers l'infini, ceci montre que $\varphi(E)$ est non majorée.

2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $F = \sqrt{f}$ et $g = \sqrt{\dfrac{1}{f}}$, montre que :

$$\int_a^b F(t)dt \int_a^b G(t)dt \geq \int_a^b F(t)G(t)dt,$$

ou encore

$$\varphi(f) \geq (b-a)^2.$$

Donc $\varphi(E)$ est minorée.
Le cas d'égalité se produit si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $G = \lambda F$, c'est-à-dire f est une constante positive.

Exercice 3 On sait la fonction f que se prolonge par continuité en 0, car $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, donc $\int_0^1 \dfrac{\sin x}{x}dx$ existe et par conséquent les deux intégrales $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}dx$ et $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}dx$ sont de même nature.
De même pour les intégrales $\int_0^{+\infty} \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| dx$ et $\int_1^{+\infty} \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| dx$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, on a pour tout $x \geq 1$:

$$\int_1^x f(t)dt = \frac{-\cos(x)}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt$$

D'une part, $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{-\cos(x)}{x} + \cos 1 = \cos 1$.
D'autre part, $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, car $\left|\dfrac{\cos(x)}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$, donc

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} = \int_{[1,+\infty[} \frac{\cos(x)}{x^2}dx.$$

Il en résulte que la fonction $\lim_{x\longmapsto\infty} F(x) = \int_1^x f(t)dt$ existe, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente.

2. Montrons que la fonction f n'est pas absolument intégrable sur $[1, +\infty[$; on a

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{|\sin(t)|}{t}dt &\geq \int_1^x \frac{\sin^2(t)}{t}dt \\ &= \frac{1}{2}\int_1^x \frac{1-\cos(2t)}{t}dt \\ &= \frac{1}{2}\int_1^x \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\cos(2t)}{t}dt \end{aligned}$$

Mais l'intégrale $\int_1^x \dfrac{dt}{t} = \ln(x)$ admet pour limite $+\infty$, alors que l'intégrale $\int_1^x \dfrac{\cos(2t)}{t}dt$ converge (intégration par parties). On en déduit que $\lim_{x\longmapsto+\infty} \int_1^x \left|\dfrac{\sin(t)}{t}\right| dt = +\infty$.

•••••••••••••