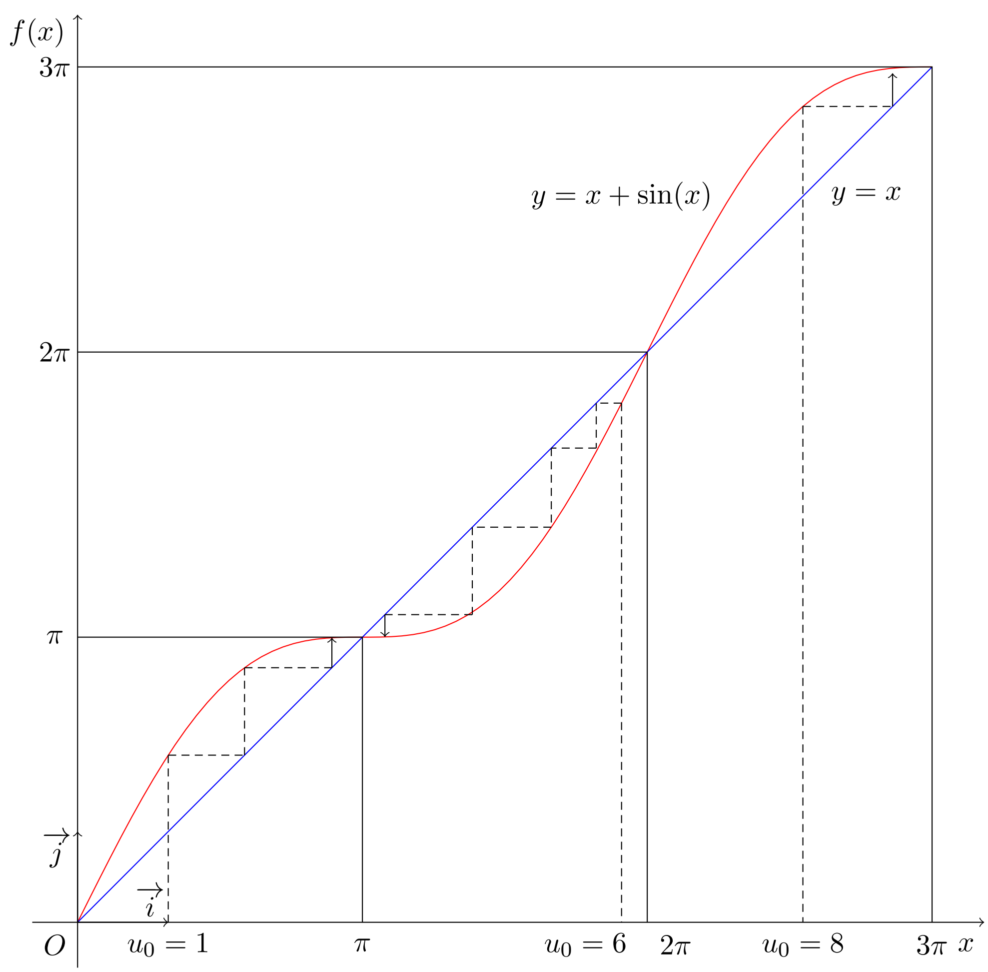
**Corrigé**
**du devoir libre $n^\circ$2**

M.Tarqi

●●●●●●●●●●●

**Exercice 1** Soit $g(x) = f(x) - x = \sin(x)$. La fonction $g$ est continue sur $[0, 3\pi]$ et change de signe, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in [0, 3\pi]$ tel que $g(\alpha) = 0$. Ainsi si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors il converge vers l'un des points fixes de $f$.
D'après l'étude de la fonction $f$, on voit que $f$ a quatre points fixes : $0, \pi, 2\pi$ et $3\pi$, et d'après le graphique, on conjecture que :

- si $u_0 \in ]0, \pi[$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et converge vers $\pi$ ;
- si $u_0 \in ]\pi, 2\pi[$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et converge vers $\pi$ ;
- si $u_0 \in ]2\pi, 3\pi[$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et converge vers $3\pi$ ;
- si $u_0 \in \{0, \pi, 2\pi, 3\pi\}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$.



Soit $u_0 \in [0, 3\pi]$, alors $u_1 = u_0 + \sin(u_0)$, donc $u_1 \geq u_0$ si, et seulement si, $u_0 \in ]0, \pi[\cup]2\pi, 3\pi[$.

1. Si $u_0 \in ]0, \pi[$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, car $f$ est croissante, et comme $0 \leq u_n \leq \pi$ ( par récurrence ), alors la suite converge vers $\pi$.
2. Si $u_0 \in ]\pi, 2\pi[$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et comme $\pi \leq u_n \leq 2\pi$ ( par récurrence ), alors la suite converge vers $\pi$.
3. Si $u_0 \in ]2\pi, 3\pi[$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers $3\pi$.
4. si $u_0 \in \{0, \pi, 2\pi, 3\pi\}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

**Exercice 2**

**Partie A**

1. On a $\forall x \in [0, 1]$, $0 \leq f(x) \leq k(1 - x)$, donc $f(1) = 0$.
2. Pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq h(x) = 1 - x^2 \leq 2(1 - x)$, donc la fonction $h$ vérifie l'inégalité (1)
3. Supposons qu'il existe $k$ tel que $\forall x \in [0, 1]$, $0 \leq x - E(x) \leq k(1 - x)$, le passage à la limite à gauche de 1 conduit à l'inégalité $1 \leq 0$, ce qui est absurde, donc $g$ ne vérifie pas la propriété (1).

**Partie B**

1. $\varphi(0) = \dfrac{0f(0)}{1 - 0} = 0$. $\varphi$ est continue à gauche de 1 si, et seulement si, $\lim\limits_{x\to 1^-} \varphi(x) = \varphi(1)$ ou encore si, et seulement si, $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)}{1 - x} = 0$.
2. (a) Il est clair que si $f$ vérifie (1), alors pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq x^n f(x) \leq k(1 - x)$, donc $g_n$ vérifie (1).
   Il est clair que $g_n(0) = 0$ et comme $f(1) = 0$, alors $g_n(1) = 0$.

   (b) Soit $x \in [0, 1]$, alors :
   $$S_n(x) = (x + x^2 + ... + x^n)f(x)$$
   D'où si $x \in [0, 1[$, $S_n(x) = x\dfrac{1 - x^n}{1 - x}f(x)$ et si $x = 1$, $S_n(x) = 0$. Ainsi si $x \in [0, 1[$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \dfrac{xf(x)}{1 - x} = \varphi(x)$ et si $x = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(1) = 0 = \varphi(1)$. Donc pour tout $x \in [0, 1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \varphi(x)$.

• • • • • • • • • • •