Corrigé
du devoir libre $n°$3

M.Tarqi

•••••••••••

Exercice 1

1. La fonction $f : x \longmapsto x^3 - 3x - 4$ étant continue sur $\mathbb{R}$ et $f(2)f(3) < 0$, donc $f(x) = 0$ admet une racine dans $[2, 3]$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Mais f est strictement croissante sur l'intervalle $[2, 3]$ cette racine est unique.
2. (a) x est solution de (1) si, et seulement si, $(u + v)^3 - 3(u + v) - 4 = 0$ ou encore si, et seulement si, $u^3 + v^3 = 4$.
   (b) u^3 et v^3 sont des solutions de l'équation $z^2-4z+1 = 0$, donc $\{u^3, v^3\} = \left\{2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\right\}$ et comme u et v ont même signe et $x > 0$, alors $x = u + v = (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{3}} + (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{3}}$.
   (c) On a bien $x^3 - 3x - 4 = 0$.

Exercice 2

1. (a) Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = [f(\sqrt{x})]^2$ donc $f(x) \geq 0$.
   (b) Si f est constante sur $[0, +\infty[$, c'est-à-dire il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \geq 0$, $f(x) = c$, alors la condition (1) devient $c = c^2$.
   Donc les fonctions constantes qui peuvent être des solutions sont la fonction constante 0 et la fonction constante 1.
   La réciproque est très claire.
2. (a) On a $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty$ et $a \in]0, 1[$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} a^{2^n} = 0$. f étant continue en $[0, +\infty[$ donc en particulier en 0 et par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = f(0)$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$u_{n+1} = f(a^{2^{n+1}}) = f[(a^{2^n})^2] = [f(a^{2^n})]^2 = u_n^2$$
   D'où par récurrence :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; u_n = u_0^{2^n} = [f(a)]^{2^n}$$
   Si $f(a) = u_0 > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ et ceci contredit la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a donc nécessairement $f(a) \leq 1$.
   (c) Si $f(a) = 1$, il vient alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$ donc d'après 2.(a) $f(0) = 1$. Mais s'il existe $b \in]0, 1[$ tel que $f(b) < 1$, on considère la suite $u'_n = f(b^{2^n})$: cette suite donc converge $f(0)$ d'après 2.(a), et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u'_n = [f(b)]^{2^n}$ et d'après 2.(b) la suite $({u'}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. On aurait donc $f(0) = 0$ et une contradiction.
   Ainsi pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = 1$.
   (d) D'après 2.(b) $f(a) \leq 1$. D'après 2.(c), f étant supposée non constante sur $[0, 1]$, on a de plus $f(a) \neq 1$. Ainsi $f(a) < 1$.
   Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = [f(a)]^{2^n}$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Donc d'après 2.$(a)$ $f(0) = 0$.
3. (a) On a $\lim\limits_{n\to\infty} a^{2^{-n}} = 1$ car $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(a^{2^{-n}}) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln a}{2^n} = 0$. f étant continue sur $[0, +\infty[$ donc en particulier en 1, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = f(1)$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$v_{n+1} = f(a^{2^{-n}}) = f[(a^{2^{-n-1}})^2] = [f(a^{2^{-n-1}})]^2 = v_{n+1}^2.$$
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{v_n}$.
D'où par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0^{2^{-n}} = [f(a)]^{2^{-n}}$$
Si $f(0) = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n = 0$ donc d'après $3.(a)$ $f(1) = 0$.
Mais s'il existe $b > 0$ avec $f(b) > 0$, on considère la suite $v'_n = [f(b)]^{2^{-n}}$: cette suite converge vers $f(1)$ d'après $3.(a)$ et vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v'_n = [f(b)]^{2^{-n}}$ d'après $3.(b)$ donc converge vers 1 : on aurait donc $f(1) = 1$ et une contradiction.
Ainsi pour tout $x > 0$ $f(x) = 0$ d'où, puisque f est continue en 0, $\forall x \in [0, +\infty[$ $f(x) = 0$.

(c) D'après $3.(b)$ f étant supposée non constante on a : $f(a) \neq 0$, ainsi $f(a) > 0$ d'après 1.a)
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = [f(a)]^{2^{-n}}$ donc $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = 1$. Donc d'après $3.(a)$ $f(1) = 1$.

4. (a) Nous avons raisonné dans toute la question 3. en supposant $a > 0$ et non en nous restreignant à $a \in]0, 1[$. On a donc vu au $3.(b)$ le résultat suivant : s'il existe $a > 0$ tel que $f(a) \neq 0$, alors f est constante. Donc nous avons déjà traité la question 4.a)

(b) f étant dérivable sur $]0, +\infty[$, on obtient donc en dérivant les deux membres de (1) :
$$\forall x > 0, \quad 2xf'(x^2) = 2f(x)f'(x)$$
soit
$$xf'(x^2) = f(x)f'(x)$$
D'où pour tout $x \in]0, +\infty[$:
$$\begin{aligned} g(x^2) &= \frac{x^2 f'(x^2)}{f(x^2)} \\ &= \frac{xf(x)f'(x)}{[f(x)]^2} \\ &= \frac{xf'(x)}{f(x)} = g(x) \end{aligned}$$

(c) Soit $a > 0$. On démontre par récurrence en utilisant 4.b) : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(a) = g(a^{2^{-n}})$. f étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, g est continue sur $]0, +\infty[$ donc en 1. Or $\lim\limits_{n \to \infty} g(a^{2^{-n}}) = g(1)$. Donc $g(a) = g(1)$ et ceci étant vrai pour tout $a > 0$, g est constante.

(d) Soit f solution du problème. Notons $g(1) = \lambda$. Alors d'après $4.(c)$ $\forall x > 0$,
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\lambda}{x}$$
donc il existe k réel tel que pour tout $x > 0$, $f(x) = ke^{\lambda \ln x} = kx^\lambda$.
Supposons $k \neq 0$. Comme f est continue en 0, alors nécessairement $\lambda \geq 0$.
On a $k = f(1)$ et en appliquant (1) à $x = 1$: $k = k^2$, donc $k = 1$.
Ainsi f est soit la fonction constante nulle, soit du de la forme $x \longmapsto x^\lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
Inversement on vérifie que ces fonctions sont solutions du problème :
En conclusion : Les fonctions f solution du problème sont :
• *la fonction constante nulle.*
• *les fonctions $x \longmapsto x^\lambda$, où λ est un réel positif.*

• • • • • • • • •