Corrigé
du devoir libre $n°$4

M.Tarqi

●●●●●●●●●●●

Exercice 1 L'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

1. *Étude des branches infinies :*

   Pour x infiniment grand, posons $x = \dfrac{1}{X}$, nous aurons alors

$$\frac{1}{1+x} = \frac{X}{X+1} = X\big(1 - X + X^2 + o(X^2)\big) = X - X^2 + X^3 + o(X^3).$$

   Or, $\arctan u = u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$ au voisinage de zéro, donc

$$\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) = X - X^2 + X^3 - \frac{X^3}{3} + o(X^3) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

   d'où

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) .$$

   La droite $\mathscr{D} : y = x - 1$ est donc asymptote à Γ, et Γ est :

   • au-dessous de $\mathscr{D}$ lorsque $x \to -\infty$.
   • au-dessus de $\mathscr{D}$ lorsque $x \to +\infty$.

2. *Étude au voisinage de -1 :*

   Posons $x = -1 + h$, alors $f(x) = (h-1)^2 \arctan\left(\dfrac{1}{h}\right)$. Nous utiliserons la relation

$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \varepsilon\frac{\pi}{2}$$

   avec $\varepsilon = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

   Nous pouvons écrire

$$f(x) = f(-1+h) = (1-2h+h^2)\left(\varepsilon\frac{\pi}{2} - \arctan h\right) = \varepsilon\frac{\pi}{2} + (-1-\varepsilon\pi)h + \left(2+\varepsilon\frac{\pi}{2}\right)h^2 + o(h^2) .$$

   Nous obtenons $\displaystyle\lim_{x\to -1^{-1}} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to -1^{+}} f(x) = +\frac{\pi}{2}$, de plus, nous voyons que :
   ▷ à gauche de -1 ($h < 0$, $\varepsilon = -1$), la courbe admet une demi-tangente $\mathscr{T}_1$ de coefficient directeur $\pi - 1$ et Γ est localement située au-dessus de cette demi-tangente (car $2 - \frac{\pi}{2} > 0$) ;
   ▷ à droite de -1 ($h > 0$, $\varepsilon = +1$), la courbe admet une demi-tangente $\mathscr{T}_2$ de coefficient directeur $-\pi - 1$ et Γ est encore localement située au-dessus de cette dernière (car $2 + \frac{\pi}{2} > 0$).

Exercice 3

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable sur chacun des intervalles ouverts $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$. Sur ces intervalles, on a $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}>0$, la fonction f est donc strictement croissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ (*mais pas sur la réunion des deux !*). On a, sans difficulté, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0=f(0)$, donc f est continue à droite en 0. Pour la dérivabilité à droite en 0,
$$\lim_{x\to 0^+} T_f(0,x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}=\lim_{X\to+\infty} Xe^{-X}=0,$$
donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=0$: la courbe $\mathscr{C}$ admet donc l'axe des abscisses comme demi-tangente à droite en 0. L'axe Oy et la droite d'équation $y=1$ sont asymptotes à $\mathscr{C}$.
2. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en un point d'abscisse $a\neq 0$ est : $y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)$. La tangente passe par l'origine si et seulement si $f(a)=a\,f'(a)$ ce qui, pour $a\neq 0$, équivaut à $a=1$ (*calcul immédiat*). Le point recherché est donc $A(1,e^{-1})$.
3. La droite (OA), qui est aussi la tangente à $\mathscr{C}$ au point A, a pour coefficient directeur $f'(a)=f'(1)=e^{-1}$. La tangente en un point B d'abscisse b est parallèle à (OA) si et seulement si elle a le même coefficient directeur, c'est-à-dire **ssi** $f'(b)=e^{-1}$.
   Étudions donc les variations de f' sur $\mathbb{R}^+$: on a $f''(x)=\dfrac{1-2x}{x^4}\,f(x)$, d'où le tableau de variations :
   La fonction f' est donc continue et strictement croissante sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ et établit une bijection de cet intervalle vers son image $[0,4e^{-2}]$. Comme e^{-1} appartient à l'intervalle image, il existe un unique $b\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ tel que $f'(b)=e^{-1}$, ce qui répond à la question.
4. (a) $D_g=]0,\sqrt{e}[\cup]\sqrt{e},+\infty[$. Il est immédiat que $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$. On posera donc $g(0)=0$ et il s'agit bien d'un prolongement par continuité.

   (b) On a $g'(x)=\dfrac{2}{x(1-2\ln x)^2}>0$, donc g est strictement croissante sur chacun des intervalles $]0,\sqrt{e}[$ et $]\sqrt{e},+\infty[$. Les calculs de limites sont immédiats. Pour la dérivabilité en zéro :
   $$T_g(0,x)=\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\frac{1}{x(1-2\ln x)}=\frac{1}{x-2x\ln x}$$
   tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 donc g n'est pas dérivable en zéro et la courbe représentative admet à l'origine une demi-tangente verticale.

   (c) Remarquons d'abord que $g(0)=0$. Ensuite, pour $x>0$, on a
   $$g(x)=x \iff 2\ln x=1-\frac{1}{x} \iff x^2=e\cdot e^{-\frac{1}{x}} \iff \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=e^{-1} \iff f'(x)=e^{-1}$$
   et les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ de cette dernière équation sont les nombres b et 1 (*cf.* questions **2.** et **3.**).
   Le dénominateur $1-2\ln x$ étant strictement positif sur l'intervalle $]0,1]$, il est facile de reprendre le calcul précédent avec des inégalités :
   $$g(x)<x \iff 1-2\ln x>\frac{1}{x} \iff 2\ln x<1-\frac{1}{x} \iff x^2<e\cdot e^{-\frac{1}{x}} \iff f'(x)>e^{-1}\,.$$

L'étude des variations de f' faite dans la question **A.3.** permet de conclure que $g(x) > x$ sur $]0, b[$ et $g(x) < x$ sur $]b, 1[$.

5. (a) Si $u_0 = b$ (point fixe de g), alors la suite u est constante de valeur b.

Sinon, l'étude des variations de g montre que chacun des intervalles $]0, b[$ et $]b, 1[$ est stable par g. Discutons alors :

• si $u_0 \in]0, b[$: cet intervalle étant stable par b, comme $g(x) > x$ sur cet intervalle, la suite u est croissante, elle est majorée (par b) donc elle converge. La continuité de g sur $[0, b]$ fait que $\lim_n u_n$ est nécessairement un point fixe de g adhérent à l'intervalle $]0, b[$. La limite de u ne peut être 0 (à cause de son sens de variation), donc $\lim_n u_n = b$.

• si $u_0 \in]b, 1[$, on montre de façon similaire que la suite (u_n) converge vers b en décroissant.

(b) Il est facile de vérifier que $0,1 < b < 0,8$ (par exemple). Considérons alors les deux suites u et v définies par

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 0,1, \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} v_0 = 0,8, \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{array} \right.$$

Ces deux suites convergent vers b et chaque terme de la suite u est inférieur à b tandis que chaque terme de la suite v est supérieur à b. On calcule donc, à l'aide d'une calculatrice, des termes u_n et v_n jusqu'à ce que la différence entre les deux soit inférieure à 10^{-2}. On trouve alors $b \simeq 0,28$ à 10^{-2} près.

• • • • • • • • • • •