Corrigé
du devoir libre n°5

M.Tarqi

• • • • • • • • • • •

Exercice 1

Exercice 2 1. Prouvons d'abord que cette loi est correctement définie, c'est-à-dire que si x et y appartiennent à S, alors $1+xy$ n'est pas nul. Dans le cas contraire, nous aurions $xy=-1$, d'où $|x|.|y|=1$ donc un au moins des nombres $|x|$ et $|y|$ serait ≥ 1, ce qui est impossible, puisque x et y appartiennent tous deux à S et que S est l'ensemble des nombres réels dont la valeur absolue est <1. La contradiction obtenue prouve que la loi $*$ est correctement définie.

2. Prouvons maintenant que cette loi est bien une loi de composition interne. L'ensemble S étant l'ensemble des nombres réels x tels que $|x|<1$, il s'agit de prouver que si x, y sont deux nombres réels tels que $|x|<1$ et $|y|<1$, alors $\left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right|<1$ ce qui équivaut à $|x+y|<|1+xy|$ ou encore à
$$x^2+2xy+y^2<1+2xy+x^2y^2,$$
ce qui équivaut à
$$y^2(1-x^2)<1-x^2.$$
Cette dernière relation est vraie, car l'inégalité stricte $y^2<1$ (qui provient de ce que y appartient à S) peut être multipliée par le nombre strictement positif $1-x^2$ (ce nombre est strictement positif parce que x appartient à S). Nous avons donc prouvé que la loi $*$ est une loi de composition interne.
Elle est associative, car le calcul montre que si x, y et z sont trois éléments de S, $(x*y)*z$ et $x*(y*z)$ sont tous deux égaux à $\dfrac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$. Il est clair que 0 est neutre pour la loi $*$ et que tout élément x de S admet $-x$ pour symétrique selon cette loi, qui est donc bien une loi de groupe (évidemment commutatif).

Exercice 3 Il suffit de montrer que tous les éléments non nuls de A sont inversibles. Soit $a\in A$ non nul et soit φ l'application de A dans A définie par : $\varphi(x)=ax$. φ est injective, en effet si $\varphi(x)=\varphi(y)$, alors $ax=ay$ ou encore $a(x-y)=0_A$ et comme A est intègre et $a\neq 0$, alors $x-y=0_A$, d'autre part A étant fini donc φ est bijective, et donc surjective, et par conséquent il existe $a'\in A$ tel que $aa'=1_A$, donc a est inversible.

Exercice 4 1. L'ensemble A est non vide. Il suffit de vérifier que A est un sous-groupe pour l'addition, et que la multiplication est stable. Soient m, n, m', n' quatre éléments de $\mathbb{Z}$.
$$(m+n\sqrt{6})-(m'+n'\sqrt{6})=(m-m')+(n-n')\sqrt{6}$$
Donc $(m+n\sqrt{6})-(m'+n'\sqrt{6})\in A$.
$$(m+n\sqrt{6})(m'+n'\sqrt{6})=(mm'+6nn')+(mn'+m'n)\sqrt{6}$$
Donc $(m+n\sqrt{6})(m'+n'\sqrt{6})\in A$.

2. Observons d'abord que pour tout élément a de A, $\varphi(\varphi(a)) = a$. Donc φ est une bijection, puisque tout élément de A a pour antécédent $\varphi(a)$.
   Montrons maintenant que φ est un morphisme pour l'addition.

$$\begin{array}{rcl}\varphi((m+n\sqrt{6})+(m'+n'\sqrt{6})) & = & \varphi(m+m'+(n+n')\sqrt{6}) \\ & = & m+m-(n+n')\sqrt{6} \\ & = & m-n\sqrt{6}+m'-n'\sqrt{6} \\ & = & \varphi(m+n\sqrt{6})+\varphi(m'+n'\sqrt{6}).\end{array}$$

   Montrons enfin que φ est un morphisme pour la multiplication.

$$\begin{array}{rcl}\varphi((m+n\sqrt{6})(m'+n'\sqrt{6})) & = & \varphi(mm'+6nn'+(mn'+m'n)\sqrt{6}) \\ & = & mm'+6nn'-(mn'+m'n)\sqrt{6} \\ & = & (m-n\sqrt{6})(m'-n'\sqrt{6}) \\ & = & \varphi(m+n\sqrt{6})\varphi(m'+n'\sqrt{6}).\end{array}$$

3. Soit $a = m+n\sqrt{6}$ un élément quelconque de A.

$$N(a) = a\varphi(a) = (m+n\sqrt{6})(m-n\sqrt{6}) = m^2-6n^2$$

   Donc N est bien une application de A dans $\mathbb{Z}$. Montrons que c'est un morphisme pour la multiplication. Soient a et a' deux éléments de A.

$$N(aa') = aa'\varphi(aa') = aa'\varphi(a)\varphi(a') = a\varphi(a)a'\varphi(a') = N(a)N(a').$$

   en utilisant le fait que φ est un morphisme pour la multiplication.
4. Si $N(x) = x\varphi(x) = 1$, alors $\varphi(x)$ est inverse de x, et si $N(x) = x\varphi(x) = -1$, alors $-\varphi(x)$ est inverse de x, la condition est suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Soit x un élément inversible de A, il existe y tel que $xy = 1$. Mais comme N est un morphisme pour la multiplication, $N(x)N(y) = 1$. Or $N(x)$ et $N(y)$ sont des entiers. Les seuls éléments de $\mathbb{Z}$ inversibles pour la multiplication sont 1 et -1. D'où le résultat.
5. Il suffit de calculer l'image par N, et d'appliquer le résultat de la question précédente.

$$N(5+2\sqrt{6}) = 25-24 = 1$$

   Donc $5+2\sqrt{6}$ est inversible et son inverse est $5-2\sqrt{6}$.

••••••••