Corrigé
du devoir libre $n°$6

M.Tarqi

• • • • • • • • • • •

Exercice 1

1. Nous devons montrer que :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X],\ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \ f(\alpha P + \beta Q) = \alpha f(P) + \beta f(Q)$$

   Cela découle immédiatement du fait que $(\alpha P + \beta Q)(1) = \alpha P(1) + \beta Q(1)$.
   Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'image par f du polynôme constant a est le réel a. Donc f est surjective. L'espace de départ est de dimension 3, l'image est de dimension 1. D'après le théorème du rang,

$$\dim \ker f = 3 - 2 = 1.$$

2. Notons $P_1 = X - 1,\ \ P - 2 = X^2 - 1$. On a $f(P_1) = f(P_2) = 0$, donc $P_1, P_2 \in \ker f$. Montrons que (P_1, P_2) est une famille libre. Si a et b sont deux réels tels que $aP_1 + bP_2 = 0$, alors :

$$bX^2 + aX - (a + b) = 0$$

   et donc $a = b = 0$.
   L'espace vectoriel F est de dimension 2, donc toute famille libre de 2 éléments est une base.
3. Le polynôme $X^2 + 1$ est non nul, il forme une famille libre, donc une base de G.
4. L'espace vectoriel $R_2[X]$ est de dimension 3. Pour montrer que $\mathscr{B} = (X - 1, X^2 - 1, X^2 + 1)$ est une base, il suffit de montrer que c'est une famille libre.
   Soient a, b, c trois réels tels que $a(X-1)+b(X^2-1)+c(X^2+1) = 0$. Alors, (a, b, c) est solution du système :

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ a = 0 \\ -a - b + c = 0 \end{cases}.$$

   On en déduit $a = b = c = 0$.
5. En calculant directement on obtient :

$$1 = 0(X - 1) - \frac{1}{2}(X^2 - 1) + \frac{1}{2}(X^2 + 1).$$
$$X = (X - 1) - \frac{1}{2}(X^2 - 1) + \frac{1}{2}(X^2 + 1).$$
$$X^2 = 0(X - 1) + \frac{1}{2}(X^2 - 1) + \frac{1}{2}(X^2 + 1).$$

   Puisque $\mathscr{B}$ est une base, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$, il existe un triplet unique de réels (a, b, c) tel que :

$$P = a(X - 1) + b(X^2 - 1) + c(X^2 + 1)$$

   Le polynôme $a(X-1)+b(X^2-1)$ appartient à F, le polynôme $c(X^2+1)$ appartient à G. Tout polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ est somme d'un élément de F et d'un élément de G, donc $\mathbb{R}_2[X] = F+G$. De plus

$$\dim F \cap G = \dim(F + G) - \dim F - \dim G = 0.$$

   Donc la somme est directe : $\mathbb{R}_2[X] = F \oplus G$.

6. On pouvait aussi calculer ces coordonnées en écrivant la matrice de passage de la base canonique à la base , puis en calculant son inverse.

$$1 = 0(X-1) - \frac{1}{2}(X^2-1) + \frac{1}{2}(X^2+1).$$
$$X = (X-1) - \frac{1}{2}(X^2-1) + \frac{1}{2}(X^2+1).$$
$$X^2 = 0(X-1) + \frac{1}{2}(X^2-1) + \frac{1}{2}(X^2+1).$$

Donc $p(1) = -\frac{1}{2}(X^2-1)$, $p(X) = (X-1) - \frac{1}{2}(X^2-1)$ et $p(X^2) = \frac{1}{2}(X^2-1)$. D'autre part, on sait que $s = 2p - Id_{\mathbb{R}_2[X]}$, donc $s(1) = -\frac{1}{2}(X^2-1) - \frac{1}{2}(X^2+1)$, $s(X) = (X-1) - \frac{1}{2}(X^2-1) - \frac{1}{2}(X^2-1)$ et $p(X^2) = \frac{1}{2}(X^2-1) - \frac{1}{2}(X^2+1)$

Exercice 2

1. Soit a, b, c, d quatre réels tels que $as_1 + bc_1 + cs_2 + dc_2 = 0$. Donc on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a\sin(x) + b\cos(x) + c\sin(2x) + d\cos(2x) = 0.$$

Choisissons des valeurs particulières pour x :

$$\begin{cases} x = 0 \Longrightarrow b + d = 0, \\ x = \pi \Longrightarrow -b + d = 0, \\ x = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow a - d = 0, \\ x = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b) + c = 0. \end{cases}$$

En prenant la somme et la différence des deux premières équations, on obtient $b = d = 0$, la troisième implique alors que $a = 0$, on déduit ensuite $c = 0$ de la quatrième. Ainsi on a montré que la famille $\mathscr{F}$ est libre.

2. Nous devons montrer que D est une application de E dans E et qu'elle est linéaire. D'après la question précédente, $\mathscr{F}$ est une base de E. Pour tout élément f de E, il existe réels a, b, c, c tels que :

$$f = as_1 + bc_1 + cs_2 + dc_2$$

L'image de f par D est :

$$D(f) = f' = ac_1 - bs_1 + 2cc_2 - 2ds_2$$

L'application $D(f)$ est bien élément de E.
Pour démontrer la linéarité, il suffit d'appliquer les résultats généraux sur la dérivation : si f et f sont dérivables et si λ et μ sont deux réels, alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

3. Nous savons que D est un endomorphisme, il suffit de montrer que D est bijective. Comme E est un espace vectoriel de dimension finie et D est une application linéaire de E dans lui-même, il suffit donc de vérifier que D est injective (ou bien surjective, mais il est inutile de vérifier les deux).
Pour montrer que est injective, il suffit de montrer que $\ker D = \{0\}$.
Soit $f = as_1 + bc_1 + cs_2 + dc_2 \in \ker D$, alors $D(f) = f' = ac_1 - bs_1 + 2cc_2 - 2ds_2 = 0$ et donc $a = -b = 2c = -2d = 0$ et par conséquent f est l'application nulle.

Exercice 3 1. L'équation caractéristique associée est $r^2 - r + \dfrac{1}{2} = 0$. Ses solutions sont :

$$r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{i\pi}{4}}, \quad r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{-i\pi}{4}}$$

2. Admettons que l'ensemble E des solutions réelles de $\mathscr{E}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$. (voir devoir libre $n°7$).
   Une base est donnée par les deux suites :

$$C = \left(\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cos \tfrac{n\pi}{4}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } S = \left(\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \sin \tfrac{n\pi}{4}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

   D'où :

$$E = \mathrm{Vect}\,\{C, S\} = \{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left(a\cos\frac{n\pi}{4} + b\sin\frac{n\pi}{4}\right)_{n\in\mathbb{N}} / a, b \in \mathbb{R}\}.$$

3. Nous savons qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left(a\cos\frac{n\pi}{4} + b\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

   En reportant les valeurs de u_n pour $n = 0$ et $n = 2$, on trouve $a = 0$ et $b = 2$. La suite est donc :

$$\left(2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \sin\frac{n\pi}{4}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Exercice 4 Considérons l'application f de $E_1 \times E_2$ dans E définie par

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$(x_1 \in E_1, x_2 \in E_2)$

1. Il est clair que f est une application linéaire.
2. $\ker f$ est décrit par $(x, -x)$, x décrivant $E_1 \cap E_2$, de plus l'application

$$x \longmapsto (x, -x)$$

   de $E_1 \cap E_2$ dans $\ker f$ est un isomorphisme, donc $\ker f$ est isomorphe à $E_1 \cap E_2$.
3. On a : $\mathrm{Im}\, f = E_1 + E_2$ et d'après le théorème de rang :

$$\dim(E_1 \times E_2) = \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \ker f$$

   ou encore

$$\dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$$

•••••••••