Corrigé du devoir libre $n°$7

M.Tarqi

●●●●●●●●●●●

Partie I : Structure vectorielle de S

1. Si $U=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $V=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de S et λ,μ sont deux réelles, alors $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$ et $v_{n+2}=av_{n+1}+bv_n$, et donc $\lambda u_{n+2}+\mu v_{n+2}=a(\lambda u_{n+1}+\mu v_{n+1})+b(\lambda u_n+\mu v_n)$, ainsi $\lambda U+V\mu\in S$, ceci montre que S est un sous-espace vectoriel.
2. Si $(x_0,x_1)\in\mathbb{R}^2$, il existe une unique suite de S, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0=x_0$ et $u_1=x_0$. Il en résulte que l'application

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ U=(u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0,u_1) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriels.

Or, $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2=2$ donc $\dim_{\mathbb{R}} S=2$ également. On peut donc construire une base (U,V) de S en considérant $U=\varphi^{-1}((1,0))$ et $V=\varphi^{-1}((0,1))$. (Image réciproque par φ de la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$)

Partie II : Détermination pratique des suites vérifiant : $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$

1. La suite géométrique $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}\in S$ si, et seulement si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\lambda^{n+2}=a\lambda^{n+1}+b\lambda^n$ ou encore si, et seulement si, $\lambda^2-a\lambda-b=0$.
2. (a) Soient α et β de $\mathbb{R}$ tels que $\alpha(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}+\beta(\mu^n)_{n\in\mathbb{N}}=0$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\lambda^n+\beta\mu^n=0$, on obtient, en particulier pour $n=0$ et $n=1$, le système :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta=0 \\ \alpha\lambda+\beta\mu=0 \end{array}\right.$$

et comme λ et μ sont distincts, alors $\alpha=\beta=0$. Or $\dim_{\mathbb{R}} S=2$, donc les suites géométriques forment une base de S et donc toutes les suites de S s'écrivent comme combinaison linéaire de ces deux suites.

(b) Comme λ est une racine double de $x^2-ax-b=0$, alors $\lambda^2-a\lambda-b=0$ et $2\lambda=a$. Calculons :

$$\begin{array}{rcl} (n+2)\lambda^{n+2}-a(n+1)\lambda^{n+1}-b\lambda^n & = & \lambda^n[(n+2)\lambda^2-a(n+1)\lambda-b] \\ & = & \lambda^n[(n+2)\lambda^2-2(n+1)\lambda^2-(\lambda^2-a\lambda)] \\ & = & \lambda^{n+2}[(n+2)-2(n+1)+2]=0 \end{array}$$

Donc la suite $(n\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}\in S$.
Soient α et β de $\mathbb{R}$ tels que $\alpha(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}+\beta(n\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}=0$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\lambda^n+\beta n\lambda^n=0$, on obtient, en particulier pour $n=0$ et $n=1$, le système :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha=0 \\ \alpha\lambda+\beta\lambda=0 \end{array}\right.$$

et donc $\alpha=\beta=0$. Ainsi les suites $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de S et donc toutes les suites de S s'écrivent comme combinaison linéaire de ces deux suites.

(c) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r^{n+2}e^{i(n+2)\theta} = ar^{n+1}e^{i(n+1)\theta} + br^n e^{in\theta}$ et comme a et b sont réels, on obtient par comparaison des parties réelles et imaginaires :

$$r^{n+2}\cos[(n+2)\theta] = ar^{n+1}\cos[(n+1)\theta] + br^n\cos[n\theta]$$

et

$$r^{n+2}\sin[(n+2)\theta] = ar^{n+1}\sin[(n+1)\theta] + br^n\sin[n\theta].$$

Ceci montre que les deux suites $(r^n\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}, (r^n\sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}} \in S$ sont dans S.
Soient α et β de $\mathbb{R}$ tels que $\alpha(r^n\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(r^n\sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}} = 0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha\cos n\theta + \beta\sin n\theta = 0$, on obtient, en particulier pour $n = 0$ et $n = 1$, le système :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta = 0 \end{cases}$$

et comme $\sin\theta \neq 0$ (les solutions complexes non réelles) donc $\alpha = \beta = 0$. Ainsi les suites $(r^n\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r^n\sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de S et donc toutes les suites de S s'écrivent comme combinaison linéaire de ces deux suites.

Partie II : Applications

1. L'équation caractéristique associe au système (1) s'écrit : $r^2 + r - 2 = 0$ dont les racines sont 1 et -2, donc la solution général est de la forme $u_n = \alpha(1)^n + \beta(-2)^n = \alpha + \beta(-2)^n$. Les conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$, entraînent $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha - 2\beta = 0$, d'où :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^n.$$
Pour les autres systèmes, on trouve respectivement :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right),\ \ u_n = 2^n - n2^{n+1}.$$
2. On pose $u_n = \ln c_n$ ($\forall n \in \mathbb{N},\ \ c_n > 0$), on obtient donc $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $2u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Ainsi $u_n = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{2}{3}$ et par conséquent $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} u_n} = e^{\frac{2}{3}}$.
3. Si $x = 0$, $I_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $I_0 = \pi$. Soit maintenant $x \in]-1,1[\backslash\{0\}$, on a :
$$\begin{aligned} x\left(I_{n+2} + I_n\right) &= x\int_0^\pi \frac{\cos(n+2)t + \cos nt}{1 - x\cos t} \\ &= 2\int_0^\pi \frac{x\cos t\cos(n+1)t}{1 - x\cos t} \\ &= 2\int_0^\pi \frac{(x\cos t - 1)\cos(n+1)t}{1 - x\cos t} + 2\int_0^\pi \frac{\cos(n+1)t}{1 - x\cos t} = 2I_{n+1} \end{aligned}$$
Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1,1[\backslash\{0\}$, $x(I_{n+2} + I_n) = 2I_{n+1}$. D'autre part $I_0 = \dfrac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}$, et $I_1 = \dfrac{\pi}{x}\left[\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right]$.
La solution générale de la relation de récurrence $I_{n+2} = \dfrac{2}{x}I_{n+1} - I_n$ est de la forme $I_n = \alpha\left(1 - \sqrt{\dfrac{1-x^2}{x}}\right) + \beta\left(1 + \sqrt{\dfrac{1-x^2}{x}}\right)$, les conditions initiales I_0 et I_1, permettent de déterminer l'expression de I_n :
$$\forall x \in]-1,1[\backslash\{0\},\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ I_n = \frac{\pi}{1-x^2}\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^n.$$

• • • • • • • • •