Devoir libre n°8

Correction

Partie A. Un exemple.

1. Sur $\mathbb{R}^*$ la fonction $\text{sh}(x)$ ne s'annule pas, donc (E) est équivalente à $y'' + 2 \coth(x)y' + y = 0$. Une fonction y est solution de (E) sur $] -\infty, 0[$ (resp. $]0, +\infty[$) si et seulement si $z : x \mapsto y'(x) + \frac{1}{\tanh(x)}y(x)$ est solution de l'équation (E') $z' + \frac{1}{\tanh(x)}z = 0$.
2. Sur $\mathbb{R}_+^*$ (respectivement sur $\mathbb{R}_-^*$) la solution générale de l'équation homogène (E') est sous la forme $z : x \mapsto \frac{\lambda}{\text{sh}(x)}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).
Soit y une solution de (E') sur $\mathbb{R}$, alors :

$$y(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\text{sh}(x)} & \text{si } x > 0 \\ \frac{\mu}{\text{sh}(x)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La continuité de y en 0, entraîne nécessairement $\lambda = \mu = 0$, donc la seule solution de (E') sur $\mathbb{R}$ est la fonction nulle.

3. L'équation différentielle (E) s'écrit encore sous la forme $y'(x) + \frac{1}{\tanh(x)}y(x) = \frac{\lambda}{\text{sh}(x)}$. Cherchons une solution de la dernière équation sous la forme $y(x) = \frac{k(x)}{\text{sh}(x)}$, donc $k'(x) = \lambda$ ou encore $k(x) = \lambda x + \mu$ ($\mu \in \mathbb{R}$). D'où $y(x) = \frac{\lambda x}{\text{sh}(x)} + \frac{\mu}{\text{sh}(x)}$ sur $] -\infty, 0[$ (resp. sur $]0, +\infty[$).
Soit y une solution de (E') sur $\mathbb{R}$, alors il existe $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$y(x) = \begin{cases} \frac{\lambda x}{\text{sh}(x)} + \frac{\mu_1}{\text{sh}(x)} & \text{si } x > 0 \\ \frac{\lambda x}{\text{sh}(x)} + \frac{\mu_2}{\text{sh}(x)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La continuité de y en 0, entraîne nécessairement $\mu_1 = \mu_2 = 0$, donc les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont $y : x \mapsto \frac{\lambda x}{\text{sh}(x)}$, elles sont donc proportionnelles à $x \mapsto \frac{x}{\text{sh}(x)}$.

Partie B. Abaissement de l'ordre d'une équation différentielle.

1. Si y est solution de (E) , alors z est encore solution de l'équation différentielle :

$$a(x)u(x)z'' + [2u'(x)a(x) + b(x)u(x)]z' + [a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x)]z = 0.$$

2. Si u est une solution de l'équation (E'') : $2a(x)u' + b(x)u = 0$, alors z est solution d'une équation différentielle linéaire de la forme :

$$(E') \quad \alpha(x)z'' + \beta(x)z = 0$$

avec $\alpha(x) = a(x)u(x)$ et $\beta(x) = a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x)$.