

Corrigé du devoir libre n°9

M.Tarqi



Exercice 1 1. La matrice M_α est inversible si, et seulement si, $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq -2$.

$$2. (a) M_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\alpha-1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff x = z = \frac{-1}{2+\beta}y \iff S = \text{Vect}\{v_1\}, \text{ avec } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\beta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(b) M_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\alpha+2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff x = \frac{-1}{2}z = \frac{1}{1-\beta}y \iff S = \text{Vect}\{v_3\}, \text{ avec } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\beta \\ -2 \end{pmatrix}.$$

La matrice M_α n'est pas diagonalisable, puisque $\dim E_{\alpha-1} = 1 < 2$.

3. Les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2-\beta \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\beta \\ -2 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ puisque $\det(v_1, v_2, v_3) = 9 \neq 0$.

On a $M_\alpha v_1 = (\alpha-1)v_1$, donc $[M_\alpha - (\alpha-1)I]v_1 = 0$ et par suite $[M_\alpha - (\alpha-1)I]^2 v_1 = 0$ et

$$[M_\alpha - (\alpha-1)I]^2 v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & \beta \\ -3-\beta & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & \beta \\ -3-\beta & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

de plus $\{v_1, v_2\}$ sont linéairement indépendantes, d'où le résultat.

4. La matrice P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\{v_1, v_2, v_3\}$, donc inversible est $P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5-\beta & -1 & 2 \\ -3-3\beta & -3 & -3 \\ 4+\beta & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

5. P étant la matrice de passage de la base canonique à la base $\{v_1, v_2, v_3\}$, donc

$$N_\alpha = P^{-1}M_\alpha P = \begin{pmatrix} \alpha-1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+2 \end{pmatrix}.$$

6. On a $N_\alpha = \begin{pmatrix} (\alpha-1)^2 & 2(\alpha-1) & 0 \\ 0 & (\alpha-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha+2)^2 \end{pmatrix}$, puis on montre par récurrence sur n que $N_\alpha^n = \begin{pmatrix} (\alpha-1)^n & n(\alpha-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & (\alpha-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha+2)^n \end{pmatrix}$, ce qui permet de déduire

$$M_\alpha^n = P N_\alpha^n P^{-1} = \dots$$

pour tout entier $n \geq 0$.

7. On a $M_\alpha^n = PN_\alpha^n P^{-1} = P[N_1 + (\alpha - 1)I]^n P^{-1}$, et d'après la formule de binôme, on peut écrire pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} M_\alpha^n &= P \left[\sum_{k=0}^n C_n^k (\alpha - 1)^k N_1^k \right] P^{-1} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k (\alpha - 1)^k P N_1^k P^{-1} \\ &= C_n^0 (\alpha - 1)^n I + C_n^1 (\alpha - 1)^{n-1} P N_1 P^{-1} + C_n^2 (\alpha - 1)^{n-2} P N_1^2 P^{-1} + P \left[\sum_{k=3}^n C_n^k (\alpha - 1)^k N_1^k \right] P^{-1} \end{aligned}$$

D'autre part, on a $N_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, puis on peut vérifier facilement que $N_1^3 = 3N_1^2$ et pour tout entier naturel $k \geq 2$, $N_1^k = 3^{k-2} N_1^2$. Donc

$$\begin{aligned} M_\alpha^n &= C_n^0 (\alpha - 1)^n I + C_n^1 (\alpha - 1)^{n-1} P N_1 P^{-1} + \sum_{k=2}^n C_n^k (\alpha - 1)^k P 3^{k-2} N_1^2 P^{-1} \\ &= (\alpha - 1)^n I + n(\alpha - 1)^{n-1} M_1 + f(n) M_1^2 \end{aligned}$$

avec $f(n) = \sum_{k=2}^n 3^{k-2} C_n^k (\alpha - 1)^{n-k}$ et $f(0) = 0$.

$$\begin{aligned} (\alpha + 2)f(n) + n(\alpha - 1)^{n-1} &= \sum_{k=2}^n (\alpha + 2) 3^{k-2} C_n^k (\alpha - 1)^{n-k} + n(\alpha - 1)^{n-1} \\ &= \sum_{k=2}^n (\alpha - 1 + 3) 3^{k-2} C_n^k (\alpha - 1)^{n-k} + n(\alpha - 1)^{n-1} \\ &= \sum_{k=2}^n (\alpha - 1) 3^{k-2} C_n^k (\alpha - 1)^{n-k} + \sum_{k=2}^n 3^{k-1} C_n^k (\alpha - 1)^{n-k} + n(\alpha - 1)^{n-1} \\ &= \sum_{k=2}^n 3^{k-2} C_n^k (\alpha - 1)^{n+1-k} + \sum_{k=2}^n (\alpha + 2) 3^{k-1} C_n^k (\alpha - 1)^{n-k} + n(\alpha - 1)^{n-1} \\ &= \sum_{k=2}^n 3^{k-2} C_n^k (\alpha - 1)^{n+1-k} + \sum_{k=1}^n 3^{k-1} C_n^k (\alpha - 1)^{n-k} \\ &= \sum_{k=2}^n 3^{k-2} C_n^k (\alpha - 1)^{n+1-k} + \sum_{k'=2}^{n+1} 3^{k'-2} C_{n+1}^{k'-1} (\alpha - 1)^{n+1-k'} \\ &= \sum_{k=2}^n 3^{k-2} (C_n^k + C_n^{k-1}) (\alpha - 1)^{n+1-k} + 3^{n+1-2} C_{n+1}^{n+1} (\alpha - 1)^0 \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} 3^{k-2} C_{n+1}^k (\alpha - 1)^{n+1-k} = f(n+1) \end{aligned}$$

8. La solution générale de l'équation $f(n+1) - (\alpha + 2)f(n) = 0$ est donnée par $f(n) = c(\alpha + 2)^n$ et une solution particulière de $f(n+1) = (\alpha + 2)f(n) + n(\alpha - 1)^{n-1}$ est de la forme $(an + b)(\alpha - 1)^{n-1}$, donc la solution générale de $f(n+1) = (\alpha + 2)f(n) + n(\alpha - 1)^{n-1}$ est de la

forme $f(n) = (an + b)(\alpha - 1)^{n-1} + c(\alpha + 2)^n$.

On sait que $f(n) = \frac{1}{9} \sum_{k=2}^n C_n^k 3^k (\alpha - 1)^{n-k}$, donc

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{9} [(\alpha + 2)^n - C_n^0 3^0 (\alpha - 1)^n - C_n^1 3 (\alpha - 1)^{n-1}] \\ &= \frac{1}{9} (\alpha + 2)^n + \left(\frac{-n}{3} + \frac{1 - \alpha}{9} \right) (\alpha - 1)^{n-1} \end{aligned}$$

Ainsi $a = \frac{-1}{3}$, $b = \frac{1 - \alpha}{9}$ et $c = \frac{1}{9}$. Ceci permet de trouver de nouveau l'expression de M_α^n , en utilisant la relation $M_\alpha^n = (\alpha - 1)^n I + n(\alpha - 1)^{n-1} M_1 + f(n) M_1^2$.

• • • • •