Corrigé
du devoir surveillé $n°$7

M.Tarqi

EXERCICE

1. On a $f(x,y,z) = (-2x+5y+2z, -x+4y+2z, 2x-10y-5z)$ et $g(x,y,z) = f(x,y,z)+(x,y,z) = (-x+5y+2z, -x+5y+2z, -x+5y+2z, 2x-10y-5z)$. La matrice de g dans la base $\mathscr{B}$ est donc
$$B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -10 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. On a $u_2 = g(u_1) = g(e_1) = -e_1 - e_2 + 2e_3$, donc $Mat_{\mathscr{B}}(u_1,u_2,u_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ qui est inversible, donc $\mathscr{B}_1 = (u_1,u_2,u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. (a) On a $f(u_1) = -u_1+u_2$, $f(u_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -u_2$ et $f(u_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -u_3$. La matrice T est la matrice des coordonnées des vecteurs $f(u_1), f(u_2), f(u_3)$ dans la base (u_1,u_2,u_3). Soit
$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (b) $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et les calculs montrent que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
   (c) $A = PTP^{-1}$.

4. (a) On a $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $J^2 = 0$.
   (b) On a $T = J - I_3$, et comme I_3 et J commutent, donc d'après la formule de binôme, pour tout $k > 0$
$$T^k = \sum_{n=0}^{k} \complement_k^n (-1)^{k-n} J^n = (-1)^k I_3 + (-1)^{k-1} kJ = (-1)^k (I - kJ).$$
   (c) D'après la question précédente, $\forall k \in \mathbb{N},\ \ T^k = (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc
$$A^k = PT^kP^{-1} = (-1)^k \begin{pmatrix} 1+k & -5k & -2k \\ k & -5k+1 & -2k \\ 2k & 10k & 1+4k \end{pmatrix}.$$

5. APPLICATION : La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad X_{n+1} = AX_n,$$

et conc $\forall n \in \mathbb{N},\quad X_n = A^n X_0$. Soit

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} 1+n & -5n & -2n \\ n & -5n+1 & -2n \\ 2n & 10n & 1+4n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1}2n \\ (-1)^{n-1}2n \\ (-1)^n(1+4n) \end{pmatrix}$$

PROBLÈME

1. (a) Soient f et g deux éléments de F_α et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, il existe $P_1,\ P_2,\ Q_1,\ Q_2$ des polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = P_1(x)e^x + Q_1(x)e^{-x}$ et $g(x) = P_2(x)e^x + Q_2(x)e^{-x}$, alors
$$(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda P_1(x) + \mu P_2(x))e^x + (\lambda Q_1(x) + \mu Q_2(x))e^{-x}.$$
onc on bien $\lambda f + \mu g \in F_\alpha$ et par conséquent F_α est un sous espace vectoriel de E.

   (b) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des réels tels que $\lambda f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) + \lambda_4 f_4(x) = 0$. Pour $x = 0$ on obtient $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$ et quand x tend vers $+\infty$, on obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (si $\alpha > 0$) ou $\lambda_3 + \lambda_4 = 0$ (si $\alpha < 0$). Dans tous les on a nécessairement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. La famille est donc libre, et comme cette famille engendre F_α, alors elle forme une base de F_α.

2. (a) Il est clair que l'application D est linéaire, et comme si f est indéfiniment dérivable, $f' = D(f)$ est aussi indéfiniment dérivable, alors D est un endomorphisme de E.
Le noyau de D est décrit par les fonctions de E dont la dérivée est nulle, c'est-à-dire les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.
Soit $g \in E$, considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f : x \longmapsto \int_0^x g(t)dt.$$
On a bien $D(f) = g$, ceci montre que D est surjective, donc $\mathrm{Im}(D) = E$.

   (b) D_α étant linéaire, comme restriction d'une application linéaire. De plus si $f : x \longmapsto P(x)e^x + Q(x)e^{-x} \in F_\alpha$, alors $D_\alpha(f) : x \longmapsto (P'(x) + \alpha P(x))e^x + (Q'(x) - \alpha q(x))e^{-x} \in F_\alpha$, donc D_α est un endomorphisme de F_α.

   (c) On a $D(f_1) = f_1' = \alpha f_1$, $D(f_2) = f_2' = f_1 + \alpha f_2$, $D(f_3) = f_3' = -\alpha f_3$ et $D(f_4) = f_4' = f_4 - \alpha f_4$. D'où la matrice M_α dans la base $\mathscr{B}$:
$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

   (d) La matrice M_α est de rang 4, donc elle est inversible.

3. La matrice de $D_\alpha^2 - \lambda id_\alpha$ dans la base $\mathscr{B}$ est :
$$M_\alpha^2 - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} \alpha^2 - \lambda & 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 - \lambda & 0 & \\ 0 & 0 & \alpha^2 - \lambda & -2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 - \lambda \end{pmatrix}.$$
Donc si $\lambda = \alpha^2$, $\mathrm{rg}(D_\alpha^2 - \lambda id_\alpha) = 2$ et si $\lambda \neq \alpha^2$, $\mathrm{rg}(D_\alpha^2 - \lambda id_\alpha) = 4$.

4. (a) Dans ce cas ($\lambda = \alpha^2$), on a :
$$M_\alpha^2 - \alpha^2 I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Il est clair que $\ker(D_\alpha^2 - \lambda id_\alpha) = \mathrm{Vect}\{f_1, f_3\}$ et $\mathrm{Im}(D_\alpha^2 - \lambda id_\alpha) = \mathrm{Vect}\{f_1, f_3\}$.

(b) On a, pour $i = 1$ et $i = 2$, $(D_\alpha^2 - \lambda id_\alpha)(f_i) = 0$ et donc $(D_\alpha^2 - \lambda id_\alpha)^2(f_i) = 0$. D'autre part, $\operatorname{Im}(D_\alpha^2 - \lambda id_\alpha) = \operatorname{Vect}\{f_1, f_3\}$, donc $\operatorname{Im}(D_\alpha^2 - \lambda id_\alpha)^2 = (D_\alpha^2 - \lambda id_\alpha)(\operatorname{Vect}\{f_1, f_3\}) = \{0\}$, ceci implique que $(D_\alpha^2 - \lambda id_\alpha)^2 = 0$.

(c) On a $0 = (D_\alpha^2 - \alpha^2 id_\alpha)^2 = D_\alpha^4 - 2\alpha^2 D_\alpha + \alpha^2 id_\alpha^2$. Ceci de déduire l'expression de D_α^{-1} :

$$D_\alpha^{-1} = \frac{-1}{\alpha^4} D_\alpha^3 + \frac{2}{\alpha^2} D_\alpha.$$

5. (a) La solution générale, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y''(x) - \alpha^2 y(x) = 0$ est la forme

$$y : x \longmapsto Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x},$$

où A et B sont des nombres réels.

(b) Un application f est dans le noyau de $D^2 - \alpha^2 Id$ si, et seulement si, f est solution de l'équation différentielle $y''(x) - \alpha^2 y(x) = 0$. D'où

$$\ker(D^2 - \alpha^2 Id) = \{x \longmapsto Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} / A, B \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}\{f_1, f_3\}.$$

(c) Soit $f \in \ker(D^2 - \alpha^2 Id)^2$, alors $(D^2 - \alpha^2 Id)(f) \in \ker(D^2 - \alpha^2 Id) = \operatorname{Vect}\{f_1, f_2\}$, donc il existe des constantes λ_1 et λ_3 telles que $(D^2 - \alpha^2 Id)(f) = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.
D'autre part :

$$\begin{aligned}(D^2 - \alpha^2 Id)(g) &= (D^2 - \alpha^2 Id)(f) - \frac{\lambda_1}{2\alpha}(D^2 - \alpha^2 Id)(f_2) + \frac{\lambda_3}{2\alpha}(D^2 - \alpha^2 Id)(f_4) \\ &= \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 - \frac{\lambda_1}{2\alpha}(2\alpha f_1) + \frac{\lambda_3}{2\alpha}(-2\alpha f_3) = 0\end{aligned}$$

$g \in \ker(D^2 - \alpha^2 Id) = \operatorname{Vect}\{f_1, f_2\}$, donc il existe des nombres réels C et D tels que $g = Cf_1 + Df_3$ et donc $f = Cf_1 + Df_3 + \dfrac{\lambda_1}{2\alpha} f_2 - \dfrac{\lambda_3 \lambda}{2\alpha} f_4$. Ainsi

$$\ker(D^2 - \alpha^2 Id)^2 = \operatorname{Vect}\{f_1, f_2, f_3, f_4\} = F_\alpha.$$

6. Un application f est solution de l'équation différentielle $y^{(4)}(x) - 2\alpha^2 y''(x) + \alpha^4 y(x) = 0$ si, et seulement si, elle appartient au noyau de $(D^2 - \alpha^2 Id)^2$. D'où :

$$f : x \longmapsto Ae^{\alpha x} + Bxe^{\alpha x} + Ce^{-x} + Dxe^{-x},$$

où A, B, C, D sont des constantes réelles.

7. (a) Une solution polynomiale f_0 de $\mathscr{E}$, s'il existe, serait de degré 3. Posons donc $f_0(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, on trouve $f_0 = x^3 + 2$.

(b) Une application f est solution de l'équation différentielle $\mathscr{E}$ si, et seulement si, $f - f_0$ est solution de $y^{(4)}(x) - 2\alpha^2 y''(x) + \alpha^2 y(x) = 0$, c'est-à-dire $f - f_0 \in \ker(D^2 - \alpha^2 Id)^2$, donc $(f - f_0)(x) = Ae^{\alpha x} + Bxe^{\alpha x} + Ce^{-x} + Dxe^{-x}$, ou encore

$$f(x) = x^3 + 2 + Ae^{\alpha x} + Bxe^{\alpha x} + Ce^{-x} + Dxe^{-x},$$

où A, B, C, D sont des constantes réelles.

• • • • • • • • • • •