Corrigé du devoir surveillé $n°8$
M.Tarqi

Exercice 1

1. Les inversions de σ sont :

$$(1,6),(1,8)(1,9),(1,10),$$
$$(2,6),(2,8),(2,9)(2,10),$$
$$(3,5),(3,6),(3,8),(3,9),(3,10),$$
$$(4,5),(4,6),(4,7),(4,8),(4,9),(4,10),$$
$$(5,6),(5,8),(5,9),(5,10),$$
$$(6,8),(6,9),(6,10),$$
$$(7,8),(7,9),(7,10),$$
$$(8,9),(8,10).$$

Au total, il y a $4+4+5+6+4+3+3+2=31$ inversions. σ est donc une permutation impaire de signature -1.

2. σ est donc le produit commutatif des cycles $c_1=(1,5,7,9)$, $c_2=(3,8)$ et $c_3=(4,10,2,6)$. Donc $\varepsilon(\sigma)=\varepsilon(c_1)\varepsilon(c_2)\varepsilon(c_3)=(-1)^3(-1)^3(-1)^1=-1$.

3. On a $c_1^4=c_3^4=Id$ et $c_2^2=Id$ et $2012=4\times 503$. Donc, puisque c_1, c_2 et c_3 commutent, on a :

$$\sigma^{2012}=c_1^{2012}\circ c_2^{2012}\circ c_3^{2012}=Id.$$

Exercice 2

1. Puisque $X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)$, on peut aussi écrire :

$$X^3+1-(X-1)(X^2+X+1)=2.$$

Ceci est une identité de Bézout pour les polynômes X^3+1 et X^2+X+1 : ils sont donc premiers entre eux.

2. On a $X^3+1=(X-1)(X^2+X+1)+2$ ce qui donne la division euclidienne de X^3+1 par X^2+X+1.

3. Soient U et V deux polynômes tels que $(X^3+1)U+(X^2+X+1)V=1$. Puisque

$$(X^3+1)\frac{1}{2}-\left(\frac{X}{2}-\frac{1}{2}\right)(X^2+X+1)=1,$$

on a nécessairement : $(X^3+1)\left(U-\dfrac{1}{2}\right)-(X^2+X+1)\left(V+\dfrac{X}{2}-\dfrac{1}{2}\right)=0$.

Or X^3+1 et X^2+X+1 sont premiers entre eux. En utilisant le lemme de Gauss, on déduit que X^2+X+1 divise $U-\dfrac{1}{2}$ et que X^3+1 divise $V+\dfrac{X}{2}-\dfrac{1}{2}$: il existe un polynôme K tel que :

$$U=\frac{1}{2}+K(X^2+X+1) \text{ et } V=\frac{1}{2}(-X+1)-K(X^3+1)$$

Réciproquement, si U et V s'écrivent comme ci-dessus, alors :

$$(X^3+1)\left(U-\frac{1}{2}\right)=(X^2+X+1)\left(V+\frac{X}{2}-\frac{1}{2}\right)=K(X^3+1)(X^2+X+1)$$

Donc :

$$(X^3+1)U+(X^2+X+1)V=\frac{1}{2}(X^3+1)-\frac{1}{2}(X-1)(X^2+X+1)=1.$$

L'ensemble des couples (U,V) tels que $(X^3+1)U+(X^2+X+1)V=1$ est :

$$\left\{(\frac{1}{2}+K(X^2+X+1),V=\frac{1}{2}(-X+1)-K(X^3+1))/K\in\mathbb{R}[X]\right\}.$$

4. On trouve :

$$X^5-X^3+X^2-1=(X^2-1)(X^3+1)=(X+1)^2(X-1)(X^2-X+1)$$

et

$$X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)$$

Le pgcd des deux polynômes est $(X-1)$, leur ppcm est $(X+1)^2(X-1)(X^2-X+1)(X^2+X+1)$.

5. La division euclidienne des deux polynômes donne :

$$X^5-X^3+X^2-1=(X^2-1)(X^3-1)+2X^2-2$$

La division euclidienne de X^3-1 par X^2-2 donne :

$$X^3-1=X(X^2-1)+(X-1)$$

L'algorithme d'Euclide se termine sur : $X^2-1=(X-1)(X+1)+0$. On retrouve donc bien le fait que $X-1$ est le pgcd des deux polynômes (toujours défini à une constante près).

Exercice 3

1. On trouve :

$$\frac{2X}{X^2-1}=\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X+1}.$$

En remplaçant X par X^2, on obtient :

$$\frac{2X^2}{X^4-1}=\frac{1}{X^2-1}+\frac{1}{X^2+1}.$$

Il reste à élever les deux membres au carré :

$$\frac{4X^4}{(X^4-1)^2}=\frac{1}{(X^2+1)^2}+\frac{1}{(X^2-1)^2}+\frac{2}{X^4-1}.$$

2. Observons que les deux dernières identités ne sont pas des décompositions en éléments simples.

3. On obtient
$$\frac{1}{X^2-1}=\frac{\frac{1}{2}}{X-1}-\frac{\frac{1}{2}}{X+1}.$$
En élevant au carré, on obtient :
$$\frac{1}{(X^2-1)^2}=\frac{\frac{1}{4}}{(X-1)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{(X+1)^2}-\frac{\frac{1}{2}}{X^2-1}\ .$$
Il reste à réinjecter la décomposition de $\dfrac{1}{X^2-1}$:
$$\frac{1}{(X^2-1)^2}=\frac{\frac{1}{4}}{(X-1)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{(X+1)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{X+1}-\frac{\frac{1}{4}}{X-1}$$
En remplaçant X par X^2 dans la décomposition de $\dfrac{1}{X^2-1}$, on obtient :
$$\frac{1}{X^4-1}=\frac{\frac{1}{2}}{X^2-1}-\frac{\frac{1}{2}}{X^2+1}.$$
En utilisant à nouveau la décomposition de $\dfrac{1}{X^2-1}$, on trouve :
$$\frac{1}{X^4-1}=\frac{\frac{1}{4}}{X-1}-\frac{\frac{1}{4}}{X+1}-\frac{\frac{1}{2}}{X^2+1}$$
4. Dans l'expression de la question 1, le terme $\dfrac{1}{(X^2+1)^2}$ est un élément simple. La décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{(X^2-1)^2}$ est donnée à la question 2, celle de $\dfrac{1}{X^4-1}$ à la question 3. En rassemblant le tout on obtient :
$$\frac{4X^4}{(X^4-1)^2}=\frac{1}{(X^2+1)^2}-\frac{1}{X^2+1}+\frac{\frac{1}{4}}{(X-1)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{X-1}+\frac{\frac{1}{4}}{(X+1)^2}-\frac{\frac{1}{4}}{X+1}.$$

Exercice 4

1. La fonction $t\longmapsto\dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,
$$\forall t\in[k,k+1]\ ,\quad \frac{1}{k+1}\ \leqslant\ \frac{1}{t}\ \leqslant\ \frac{1}{k}.$$
Donc
$$\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}t\ \leqslant\ \int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\ \leqslant\ \int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,\mathrm{d}t\ ,$$
ou encore
$$\frac{1}{k+1}\ \leqslant\ \int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\ \leqslant\ \frac{1}{k}\ .$$
Pour tout $k\geq 2$, on applique l'inégalité de gauche à $k-1$:
$$\frac{1}{k}\ \leqslant\ \int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\ .$$
On obtient donc la double inégalité :
$$\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\ \leqslant\ u_k\ \leqslant\ \int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\ .$$

2. Sommons l'inégalité de gauche pour k allant de 1 à n :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \;\leqslant\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,,$$

donc $\ln(n+1) \leq h_n$. Sommons ensuite la seconde inégalité, pour k allant de 2 à n :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \;\leqslant\; \int_1^{n} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\,,$$

donc $h_n - 1 \leqslant \ln(n)$.

3. La suite $(\ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$, il en est de même pour la suite des sommes partielles $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge. De plus

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \;\leqslant\; \frac{h_n}{\ln(n)} \;\leqslant\; \frac{\ln(n)+1}{\ln(n)}\,.$$

Or

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)+\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}\,.$$

La suite $\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$ tend vers 1. Comme

$$\frac{\ln(n)+1}{\ln(n)} = 1 + \frac{1}{\ln n}\,,$$

la suite $\left(\dfrac{\ln(n)+1}{\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$ tend également vers 1. La suite $\left(\dfrac{h_n}{\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$ est encadrée par deux suites qui convergent vers 1, donc elle converge aussi vers 1 : h_n est équivalent à $\ln(n)$ quand n tend vers l'infini.

4. Le résultat découle de l'encadrement suivant, déjà démontré dans la question 1.

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \;\leqslant\; \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \;\leqslant\; \frac{1}{n} = u_n\,.$$

On en déduit :

$$\delta_n = u_n - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \;\geqslant\; 0 \quad \text{et} \quad \delta_n = u_n - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \;\leqslant\; u_n - u_{n+1}$$

La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (u_n - u_{n+1})$ a des sommes partielles ńtélescopiquesż :

$$\sum_{k=1}^{n} u_n - u_{k+1} = u_1 - u_{n+1}\,.$$

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (u_n - u_{n+1})$ converge. Donc la série $\sum \delta_n$ converge, par le théorème de comparaison.

5. Calculons les sommes partielles des δ_n.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \delta_k &= \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= h_n - \int_1^{n+1} \frac{1}{y}\,\mathrm{d}t \\
&= h_n - \ln(n+1) \\
&= (h_n - \ln(n)) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= h_n - \ln(n) + O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Puisque la suite des sommes partielles des δ_n converge, il en est de même pour la suite $(h_n - \ln(n))$. Notons γ la somme de la série de terme général δ_n :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_k = \lim_{n\to\infty} h_n - \ln(n) \ .$$

6. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ est une série alternée. Pour lui appliquer le critère de convergence des séries alternées, il suffit d'observer que la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0.

7. Pour tout $k \geq 1$,

$$\int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^k}{k}\right]_0^1 = \frac{1}{k} \ .$$

En sommant de 1 à n, on obtient :

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} t^{k-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \ .
\end{aligned}$$

8. Reprenons l'identité de la question précédente :

$$s_n = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \ .$$

Or :

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} .$$

Donc :

$$\left| s_n - \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \right| = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+1} .$$

9. On a :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(2) .$$

L'inégalité de la question précédente montre que $|s_n - \ln(2)|$ tend vers 0. La suite des sommes partielles $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc vers $\ln(2)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \ln(2) .$$

10. La majoration de la question 8 montre que $|r_n| \leq 10^{-3}$ pour $n \geq 1000$. Le calcul numérique montre que le premier rang tel que $|r_n| \leq 10^{-3}$ est $n = 500$.

11. Écrivons :

$$\begin{aligned}
s_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\
&= \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \frac{2}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = h_{2n} - h_n
\end{aligned}$$

D'après la question 5, $h_n - \ln(n)$ converge vers γ, il en est donc de même de la suite $h_{2n} - \ln(2n)$. Donc :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} s_n &= \lim_{n\to+\infty} s_{2n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} h_{2n} - h_n \\
&= \lim_{n\to+\infty} (h_{2n} - \ln(2n)) + \ln(2) - (\ln(n) - h_n) \\
&= \gamma + \ln(2) - \gamma = \ln(2).
\end{aligned}$$