

Chapitre 1

ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Mohamed TARQI

Table des matières

1	Introduction	1
2	Inclusion. Réunion. Intersection	2
2.1	Inclusion, partie, complémentaire, ensemble de parties.	2
2.2	Intersection et réunion des ensembles	2
3	Produit cartésien. Relations. Applications	3
3.1	Produit cartésien	3
3.2	Relation entre ensembles. Relation d'équivalence	4
3.3	Application de E dans F	5
3.4	Image et images réciproque de sous-ensemble	6
3.5	Surjections. Injections. Bijections. Application réciproque	6
3.6	Compositions des applications	7
4	Relations d'ordre	8
4.1	Relation d'ordre. Ensemble ordonné	8
4.2	Majorants, minorants d'une partie d'un ensemble ordonné	8
4.3	Borne supérieure. Borne inférieure	9
		

1 Introduction

La notion d'ensemble correspond aux notions courantes de collection, de groupement, de classes, etc... d'objets de nature quelconque ; dans la langue courante, ces objets s'appellent les éléments, les membres, les individus,... de l'ensemble.

On mathématiques on choisi les mots ensemble et élément. Donc un ensemble est constitué d'éléments, ces deux mots étant précisés par les règles suivantes :

1. Un ensemble E est bien définie lorsqu'on possède un critère permettant d'affirmer pour tout objet a , s'il appartient à l'ensemble E ou n'appartient pas à l'ensemble E ; on écrit et on lit respectivement :
 $a \in E$ " a appartient à E " ou " a est élément de E " ou " E contient a "
 $a \notin E$ " a n'appartient pas à E " ou " a n'est pas élément de E " ou " E ne contient pas a "
2. Un être mathématique ne peut être à la fois un ensemble et un élément de cette ensemble, c'est-à-dire $a \in a$ est interdite. Remarquons que cette interdiction conduit à une autre interdiction : on ne peut pas parler d'un ensemble E dont les éléments seraient tous les ensembles, car on devrait avoir $E \in E$.
3. Deux ensembles sont égaux s'ils sont constitués de mêmes éléments, sinon ils dites distinctes, on écrit $E = F$, $E \neq F$.

En général, on détermine un ensemble soit, en explicitant ses éléments : $E = \{1, a, \nabla\}$, soit par compréhension : $E = \{x/x \text{ verifié la propriété } P\}$.

Par exemple :

$$\mathbb{N} = \{x/x \text{ entier} \} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{x/x \text{ entier relatif} \} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

2 Inclusion. Réunion. Intersection

2.1 Inclusion, partie, complémentaire, ensemble de parties.

Définition 2.1. On dit qu'un ensemble F est inclus dans un ensemble E ou F est une partie de E lorsque tout élément de F appartient à E ; on écrit : $F \subset E$ ou $E \supset F$

Par définition :

$$(F \subset E) \iff (\text{pour tout } x) (x \in F \implies x \in E)$$

Propriétés : L'inclusion des ensembles est :

- réflexive, c'est-à-dire $E \subset E$ pour tout ensemble E ;
- antisymétrique, c'est-à-dire $[F \subset E \text{ et } E \subset F] \implies E = F$;
- transitive, c'est-à-dire $[E \subset F \text{ et } F \subset G] \implies E \subset G$

On admet l'existence d'un ensemble ne contenant aucun élément, noté $\emptyset$ (ensemble vide). On a pour tout ensemble E ,

$$\forall x, x \in \emptyset \implies x \in E,$$

donc $\emptyset \subset E$.

Définition 2.2. Étant donné une partie A de E , on appelle complémentaire de A par rapport à E l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A ; on la note $\complement_E^A$ ou $E \setminus A$ ou encore A_E^C ou tout simplement A^C . Une partie non vide de E , distincte de E , est appelée partie propre de E .

$$\complement_E^A = \{x \in E / x \notin A\}$$

Chacun des ces ensembles est une partie propre des suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Propriétés : A et B des parties d'un ensemble E , on a les propriétés suivantes :

- $B = \complement_E^A \iff A = \complement_E^B$.
- $\complement_E(\complement_E^A) = A$.
- $\complement_E^E = \emptyset$ et $\complement_E^\emptyset = E$.

Définition 2.3. Considérons toutes les parties d'un ensemble E , elles décrivent un nouvel ensemble appelé ensemble des parties de E et noté $\mathcal{P}(E)$.

On a donc

$$A \subset E \iff A \in \mathcal{P}(E),$$

en particulier si a est un élément de E (non vide) :

$$a \in E \iff \{a\} \subset E \iff \{a\} \in \mathcal{P}(E).$$

2.2 Intersection et réunion des ensembles

Définition 2.4. Soient A et B deux ensembles. On définit les ensembles : suivantes

1. $A \cap B = \{x / x \in A \text{ et } x \in B\}$, intersection de A et B .
2. $A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}$, réunion de A et B .

Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont **disjointes**.

Généralisation : Soit I un ensemble non vide, pour tout $i \in I$, on se donne un ensemble E_i . on définit les ensembles suivantes :

- $\bigcap_{i \in I} E_i = \{x / \forall i \in I, x \in E_i\}$ intersection de la famille d'ensembles $(E_i)_{i \in I}$.
- $\bigcup_{i \in I} E_i = \{x / \exists i \in I, \text{ tel que } x \in E_i\}$ réunion de la famille d'ensembles $(E_i)_{i \in I}$.

Propriétés :

1. L'intersection et la réunion sont commutatives :

$$\forall A, \forall B; A \cap B = B \cap A \text{ et } A \cup B = B \cup A$$

2. L'intersection et la réunion sont associatives :

$$\forall A, \forall B, \forall C; (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \text{ et } (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

3. L'intersection est distributive par rapport à la réunion et la réunion est distributive par rapport à l'intersection :

$$\forall A, \forall B, \forall C; A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ et } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

4. En fin :

$$\forall A : A \cap A = A \text{ et } A \cup A = A$$

$$\forall A : A \cap \emptyset = \emptyset \text{ et } A \cup \emptyset = A$$

Définition 2.5. Soient A et B deux parties d'un ensemble E . On appelle **différence** des ensembles A et B et on note $A \setminus B$ l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B .

Proposition 2.1. (Lois de Morgan) Quels que soient les éléments A et B de $\mathcal{P}(E)$, on a :

$$C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$$

et

$$C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B.$$

Démonstration : En effet, $(\forall x \in E)$, on peut écrire :

$$non(x \in A \text{ et } x \in B) \iff (x \notin A) \text{ ou } (x \notin B)$$

$$non(x \in A \text{ ou } x \in B) \iff (x \notin A) \text{ et } (x \notin B)$$

c'est à dire : $C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$ et $C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B$ □

3 Produit cartésien. Relations. Applications

3.1 Produit cartésien

Définition 3.1. Soit E et F deux ensembles. Pour $x \in E$ et $y \in F$, on introduit un nouvel objet mathématique, le couple de premier terme x et de second terme y , défini par le symbole (x, y) , avec la convention que :

$$(x, y) = (x', y') \iff x' = x \text{ et } y' = y.$$

On appelle **produit cartésien** de deux ensembles E et F , noté $E \times F$, l'ensemble des couples ayant pour premier terme un élément de E et pour second terme un élément de F :

$$E \times F = \{(x, y) / x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Remarque : Ne pas confondre la notion de couple (x, y) et la notion d'ensemble à deux éléments $\{x, y\}$.

$$(x, y) \in E \times F, \{x, y\} \in \mathcal{P}(E \cup F);$$

en particulier $\{x, y\} = \{y, x\}$, alors que $(x, y) \neq (y, x)$ si $x \neq y$.

Exemple : Si $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{A, B\}$ sont des ensembles à trois et deux éléments respectivement, l'ensemble $E \times F$ a six éléments qui sont :

$$(a, A), (a, B), (b, A), (b, B), (c, A), (c, B),$$

et l'ensemble $E \times E$ a neuf éléments qui sont :

$$(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c).$$

Plus généralement, si E et F sont des ensembles finis contenant m et n éléments, le produit cartésien $E \times F$ est fini et contient mn éléments.

3.2 Relation entre ensembles. Relation d'équivalence

Définition 3.2. On appelle relation $\mathcal{R}$ de A dans B , toute propriété définie sur $A \times B$, c'est-à-dire une propriété caractéristique des éléments d'une partie G de $A \times B$. G s'appelle le graphe de la relation $\mathcal{R}$.

On a donc

$$G \subset A \times B$$

Si $(x, y) \in G$ on dit que x est en relation avec y et on note $x\mathcal{R}y$ ou encore $\mathcal{R}(x, y)$.

Ainsi :

$$\mathcal{R}(x, y) \iff (x, y) \in G$$

ou encore

$$G = \{(x, y) \in A \times B / \mathcal{R}(x, y)\}$$

Exemple : Sur un ensemble E , la relation d'égalité $x = y$ a pour graphe l'ensemble des couples $(x, x), x \in E$; cet ensemble est appelé la *diagonale* de l'ensemble $E \times E$.

Définition 3.3. Une relation $\mathcal{R}$ de E dans E (relation binaire définie sur E) est :

- *reflexive* si $\forall x \in E, \mathcal{R}(x, x)$;
- *symétrique* si $\forall x, y \in E, \mathcal{R}(x, y) \implies \mathcal{R}(y, x)$;
- *antisymétrique* si $\forall x, y \in E, [\mathcal{R}(x, y) \text{ et } \mathcal{R}(y, x) \implies x = y]$;
- *transitive* si $\forall x, y, z \in E, [\mathcal{R}(x, y) \text{ et } \mathcal{R}(y, z)] \implies \mathcal{R}(x, z)$.

Définition 3.4. (RELATION D'ÉQUIVALENCE) Une relation $\mathcal{R}$ de E dans E (relation binaire définie sur E) est une relation d'équivalence si et seulement si :

- *reflexive* si $\forall x \in E, \mathcal{R}(x, x)$;
- *symétrique* si $\forall x, y \in E, \mathcal{R}(x, y) \implies \mathcal{R}(y, x)$;
- *transitive* si $\forall x, y, z \in E, \mathcal{R}(x, y) \text{ et } \mathcal{R}(y, z) \implies \mathcal{R}(x, z)$.

On écrira alors $x \equiv y \text{ (mod } \mathcal{R})$ au lieu de $x\mathcal{R}y$.

Exemples :

1. Soit E un ensemble quelconque, la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad x\mathcal{R}y \iff x = y$$

est une relation d'équivalence.

2. $E = \mathbb{Z}$, la relation $\mathcal{S}$ définie par ($n > 0$) :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \quad x\mathcal{S}y \iff n/x - y$$

est une relation d'équivalence (on l'appelle congruence modulo n).

3. Dans le plan euclidien, l'équipollence, c'est-à-dire $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, est une relation d'équivalence.

4. Sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, soit la relation " $x \leq y$ ". Si on identifie l'ensemble des couples de nombres réels aux points du plan, le graphe est constitué des points de la première bissectrice $y = x$ et des points situés au-dessus de cette droite.
5. f étant une application de E dans F , la relation définie sur E par $f(x) = f(x')$ est une relation d'équivalence.

Définition 3.5. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E . Pour tout élément x de E , on note

$$cl_{\mathcal{R}}(x) = \{y \in E / x \mathcal{R} y\} \text{ ou encore } \bar{x} = \{y \in E / x \mathcal{R} y\}$$

l'ensemble $cl(x)$ s'appelle la classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$.

Proposition 3.1. Deux classes d'équivalence, modulo $\mathcal{R}$, sont disjointes ou confondues.

Démonstration : Considérons deux classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$, $\bar{x}$ et $\bar{y}$. Alors $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont disjointes ou bien il existe $z \in \bar{x} \cap \bar{y}$, donc

$$z \in \bar{x} \iff z \mathcal{R} x \text{ et } z \in \bar{y} \iff z \mathcal{R} y$$

d'où par transitivité $x \mathcal{R} y$, donc $\bar{x} = \bar{y}$. □

Soit $x \in E$, alors $x \mathcal{R} x$ donc $x \in \bar{x}$, ce qui entraîne $E \subset \bigcup_{x \in E} \bar{x}$ et par suite $E = \bigcup_{x \in E} \bar{x}$

Réciproquement, soit $\mathcal{P} = (A_i)_{i \in I}$ une partition de E , la relation " $x \mathcal{R} y \iff \exists i \in I / x, y \in A_i$ " est une relation d'équivalence définie sur E . D'où le théorème :

THÉORÈME 3.1. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E , l'ensemble des classes d'équivalence, modulo $\mathcal{R}$, est une partition de E .

Réciproquement, toute partition de E définit une relation d'équivalence sur E .

L'ensemble des classes d'équivalence sur E , modulo $\mathcal{R}$, est appelé ensemble quotient de E par la relation $\mathcal{R}$ et noté $E/\mathcal{R}$

Attention : Si $x \in E$, alors :

$$x \in \bar{x}, \bar{x} \subset E \text{ et } \bar{x} \in \mathcal{P}(E)$$

$$\bar{x} \in E/\mathcal{R}, E/\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(E) \text{ et } E/\mathcal{R} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$$

Étude d'un exemple : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Dans $\mathbb{Z}$ la relation $n/x - y$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est une relation d'équivalence, cherchons l'ensemble quotient, que l'on note : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, il existe q et r uniques tels que $x = nq + r$ et $0 \leq r < n$ (cf. Arithmétique de $\mathbb{Z}$). On a donc $\bar{x} = \bar{r}$ et par conséquent

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}} \{\bar{x}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}.$$

3.3 Application de E dans F

Définition 3.6. Étant donnée deux ensembles E et F . Une application f de E dans F est une relation de E dans F telle que :

$$\forall x \in E, \exists ! y \in F \text{ telle que } (x, y) \in \mathcal{R}$$

On écrira alors $y = f(x)$ au lieu de $\mathcal{R}(x, y)$ et y sera appelé l'image de x par f , l'ensemble E sera appelé ensemble de départ et l'ensemble F l'ensemble d'arrivée.

Le graphe de l'application f est la partie de $E \times F$ définie par :

$$G = \{(x, y) \in E \times F / y = f(x)\}.$$

Notations :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array} \text{ ou } f : E \longrightarrow F$$

- On note l'ensemble des applications de E dans F par $\mathcal{F}(E, F)$ ou encore F^E .

3.4 Image et images réciproque de sous-ensemble

Définition 3.7. Soit f une application de E dans F et X une partie de E , on appelle image de X par f et on note $f(X)$ la partie de F définie par :

$$f(X) = \{f(x)/x \in X\}$$

en particulier $f(A)$ est appelé l'image de f

Y étant une partie de F , on appelle image réciproque de Y par f et on note $f^{-1}(Y)$ la partie de E définie par :

$$f^{-1}(Y) = \{x \in E / f(x) \in Y\}$$

Exemple : Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = \sin(x) \end{array}$$

- $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$
- $f^{-1}(2) = \emptyset$
- $f^{-1}(\frac{1}{2}) = \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

3.5 Surjections. Injections. Bijections. Application réciproque

Étant donné une application f de E dans F et y un élément de F , deux questions se posent :

1. $f^{-1}(y)$ est-il vide ou non ?
2. si $f^{-1}(y)$ n'est pas vide, cette partie de E contient-elle un ou plusieurs éléments ?

Définition 3.8. Soient E et F deux ensembles non vides, et f une application de E , l'ensemble de départ, dans F , l'ensemble d'arrivée.

• On dit que f est une application surjective ou une surjection si tout élément de F est l'image d'un élément au moins de E , c'est à dire :

$$(\forall y \in F), (\exists x \in E) \text{ tel que } y = f(x)$$

donc $\forall y \in F$, $f^{-1}(y)$ n'est pas vide.

• On dit que f est une application injective ou une injection si tout élément de F est l'image d'un élément (au plus) de E , c'est à dire :

$$(\forall x, y \in E), [f(x) = f(y) \implies x = y]$$

• On dit que f est une application bijective ou une bijection si tout élément de F est l'image d'un élément unique de E , c'est à dire :

$$(\forall y \in F), (\exists! x \in E) \text{ tel que } y = f(x)$$

Donc une application est une bijection si et seulement si elle est à la fois surjective et injective.

S'il existe une bijection entre deux ensembles E et F , on dit aussi que c'est une application bi-voque de E sur F .

Théorème et définition 3.1. L'application $f: E \longrightarrow F$ est bijective si et seulement si l'équation $f(x) = y$ à une solution unique quelque soit y de F . L'application ainsi définie

$$\frac{F}{y} \implies \frac{E}{x}$$

est appelé fonction réciproque de la fonction f , notée f^{-1} .

Démonstration : Supposons que $\forall y \in F$, l'équation $y = f(x)$ à une unique solution, désignons la par $x = g(y)$, nous définissons ainsi une application de F dans E :

$$g: \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & x = g(y) \end{array}$$

qui est visiblement bijective car : $y = f(x) \iff x = g(y)$. $\square$

Remarque : La notation $f^{-1}(A)$ n'a rien à avoir avec la bijection de l'application f : c'est une partie de l'ensemble de départ de f . Donc il ne faut pas confondre $f^{-1} : \mathcal{P}(F) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ avec la bijection réciproque $f^{-1} : F \longrightarrow E$ si f est bijective.

Exercice résolu : Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. À chaque partie A de E , on associe son image directe $\Im(A) = \{f(x)/x \in A\}$. On définit ainsi une application $\Im$ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(F)$.

1. Montrer que f est injective si et seulement si $\Im$ est injective.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $\Im$ est surjective.

Solution :

1. Soit f injective et X et Y des parties de E tels que $\Im(X) = \Im(Y)$. Soit $x \in X$, alors $f(x) \in \Im(X)$, donc $f(x) \in \Im(Y)$, il existe alors $y \in Y$ tel que : $f(x) = f(y)$ et par injectivité de f , on en déduit que $x = y$ et $x \in Y$. Donc $X \subset Y$. De même $Y \subset X$, ainsi $X = Y$ et $\Im$ est injective.
Réciproquement, soit $\Im$ injective et x et y des éléments de E tel que $f(x) = f(y)$. Alors $\Im(\{x\}) = \Im(\{y\})$ ce qui implique $\{x\} = \{y\}$ par injectivité de $\Im$, donc $x = y$ et f est injective.
2. Soit f surjective et $B \subset F$. Soit $A = \{x \in E / f(x) \in B\}$. Alors $\Im(A) = B$ et $\Im$ surjective.
Réciproquement, soit $\Im$ surjective et $y \in F$, il existe alors $A \in \mathcal{P}(E)$ tel que $\Im(A) = \{y\}$. Soit $x \in A$, alors $f(x) = y$ et par conséquent f est surjective.

3.6 Compositions des applications

Définition 3.9. Soit trois ensembles E, F et G distinctes ou non et deux applications f de E dans F et g de F dans G définies par :

$$\begin{array}{l} x \longrightarrow y = f(x) \\ y \longrightarrow g(y) = z \end{array}$$

On peut définir l'application h de E dans G par :

$$\forall x \in E, \quad z = h(x) = g(f(x))$$

h est l'application composée de g et de f et se note $g \circ f$, donc

$$\forall x \in E, \quad g(f(x)) = g \circ f(x)$$

THÉORÈME 3.2. Si f et g sont surjectives (resp. injectives) $g \circ f$ est surjective (resp. injective)
Si f et g sont bijections, $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration : Posons

$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array} \quad g: \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & G \\ y & \longmapsto & z = g(y) \end{array} \quad h = g \circ f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & z = h(x) \end{array}$$

1. Supposons f et g surjectives ; pour tout z de G , il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$ et il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, donc il existe $x \in E$ tel que $z = h(x)$. Alors h est surjective.

2. Supposons f et g injectives ; soient $(x, x') \in E \times E$ tels que $h(x) = h(x')$.

$$h(x) = h(x') \iff f(x) = f(x') \iff x = x',$$

donc h est injective.

3. Si f et g sont bijectives, il en est de même de $g \circ f$ et pour tout $z \in G$, on a :

$$z = g \circ f(x) \iff z = g(f(x)) \iff f(x) = g^{-1}(z) \iff x = f^{-1} \circ g^{-1}(z),$$

donc $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

□

4 Relations d'ordre

4.1 Relation d'ordre. Ensemble ordonné

Soit E une ensemble non vide quelconque.

Définition 4.1. Une relation $\mathcal{R} \subset E \times E$ est une relation d'ordre s'elle est reflexive, antisymétrique et transitive. La relation d'ordre $\mathcal{R}$ est notée en générale $\leq$ et on note $x \leq y$ au lieu de $\mathcal{R}(x, y)$. On dit que $(E, \leq)$ est un ensemble ordonné.

Définition 4.2. on dit que $(E, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné (ou que la relation d'ordre $\leq$ est totale sur E) si toutes les éléments de E sont comparables deux à deux. Cela signifie que $\forall x, y \in E$ on a $x \leq y$ ou bien $y \leq x$

Lorsqu'il existe au moins un couple (x, y) d'éléments de E non comparables, on dit que $\mathcal{R}$ définit un ordre partiel ou que E est partiellement ordonné par $\mathcal{R}$.

Exemples :

1. Sur $\mathbb{R}$ la relation $a \leq b$ est une relation d'ordre totale.
2. Sur $\mathbb{N}^*$ la relation a/b (a divise b) est une relation d'ordre partiel.
3. Étant donné un ensemble E , sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $A \subset B$ est une relation d'ordre partiel.

4.2 Majorants, minorants d'une partie d'un ensemble ordonné

Définition 4.3. Étant donné une partie X d'un ensemble ordonné E , un élément a de E est un majorant de X (resp. minorant de X) si $\forall x \in X$ $x \leq a$. (resp. $a \leq x$.)

On dit alors que X est une partie majorée (resp. minorée) de E .

Une partie à la fois majorée et minorée est appelée une partie bornée de E .

Exemple :

1. L'ensemble $A = \{1 + n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est minoré, par exemple par 0.
2. L'ensemble $B = \{(-1)^n - n, n \in \mathbb{N}\}$ est majoré, par exemple par 1.
3. L'ensemble $C = \{\frac{n+2}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ est minoré par 1 et majoré par 2, donc C est borné.

Théorème et définition 4.1. S'il existe dans E , ensemble ordonnée, un élément supérieure à tous les autres il est unique, on l'appelle le plus grand élément de E .

De même, s'il existe dans E , ensemble ordonnée, un élément inférieure à tous les autres il est unique, on l'appelle le plus petit élément de E .

Ces deux éléments, on les notes respectivement :

$$\text{Max}E \quad \text{et} \quad \text{Min}E.$$

Démonstration : Supposons qu'il existe dans E , un élément M tel que :

$$\forall x \in E, x \leq M$$

cette élément est unique, en effet, soit M' un autre élément tel que :

$$\forall x \in E, x \leq M'$$

on a, à la fois

$$M \leq M' \text{ et } M' \leq M$$

donc

$$M = M'$$

De même pour le plus petit élément. □

4.3 Borne supérieure. Borne inférieure

Définition 4.4. On appelle borne supérieure dans E , d'une partie majorée X de E , ordonnée, le plus petit des majorants (s'il existe) et borne inférieure de E d'une partie minorée X de E le plus grand des minorants (s'il existe).

Ces bornes, s'elles existent, on les notes :

$$\inf_E(X) \text{ et } \sup_E(X)$$

Proposition 4.1. X étant une partie d'un ensemble ordonné, les deux propriétés sont équivalentes :

- M est la borne supérieure (resp. inférieure) de X et appartient à X .
- M est le plus grand (resp. le plus petit) élément de X .

Exemple :

1. Le plus petit élément de $A = \{1 + n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est 2, c'est aussi $\inf_{\mathbb{R}}(A)$.
2. Le plus grand élément de l'ensemble $B = \{(-1)^n - n, n \in \mathbb{N}\}$ est 1, c'est aussi $\sup_{\mathbb{R}}(B)$.
3. Le plus grand élément de $C = \left\{ \frac{n+2}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$ est 2, c'est $\sup_{\mathbb{R}}(C)$. C n'admet pas de plus petit élément. (Preuve en exercice)

.....