Chapitre 10
ENSEMBLES FINIS

Mohamed TARQI

Table des matières

• • • • • • • • • • •

1 Ensembles finis

1.1 Parties finies d'un ensemble fini

Définition 1.1 *Un ensemble E est fini, s'il est vide ou s'il existe une bijection de E vers un intervalle fermé $[1, n]$ de $\mathbb{N}$, $(n \neq 0)$. Un ensemble non fini est appelé infini. n s'appelle le cardinal de E, ou encore le nombre d'éléments de E ; on pose $cardE = n$.*

Par convention, on pose : $card\varnothing = 0$

Théorème 1.1 **Toute partie A d'un ensemble fini B est finie et $cardA \leq cardB$ et $cardA = cardB$ implique $A = B$.**

Démonstration : • Si $B = \varnothing$, il est de même de A et le théorème est evident.
• De même si $A = \varnothing$.
• Supposons donc A et B non vides. Soit g une bijection de B sur $[1, b]$ $(b = cardB)$; désignons par g' la restriction de g sur A $(g' = g/_A)$ c'est une bijection de A vers $g(A) \subset [1, b]$. Or $g(A)$ est une partie de $[1, b]$ finie, A est donc finie.
Soit f une bijection de A vers $[1, a]$ $(a = cardA)$ et φ l'injection canonique de A dans B ; $\varphi : x \longrightarrow x$ nous avons le diagramme :

$$[1, a] \xrightarrow{f^{-1}} A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{g} [1, b]$$

$$[1, a] \overset{g\circ\varphi\circ f^{-1}}{\longrightarrow} [1, b]$$

$h = g \circ \varphi \circ f^{-1}$ est une injection, ce qui implique $[1, a] \subset [1, b]$, donc $a \leq b$.
Si $a = b$, h est une bijection, il en est de même de $\varphi = g^{-1} \circ h \circ f$ et par conséquent $A = B$ □

Corollaire 1.1 **L'intersection d'une famille quelconque finie ou infinie d'ensembles finis est finie.**

Démonstration : En effet, Soit $(A_i)_{i\in I})$ une famille d'ensembles finis, alors $\forall i \in I$, $\bigcap_{j\in I} A_j \subset A_i$ et comme A_i est fini, il est de même de $\bigcap_{j\in I} A_j \subset A_i$ □

Corollaire 1.2 **Si f est une application de E fini dans un ensemble quelconque F, $f(E)$ est fini et :**

$$cardf(E) \leq cardE$$

De plus f est injective si, et seulement si, $cardf(E) = cardE$.

Démonstration : Soit $y \in f(E)$, choisissons un x unique dans chaque sous-ensemble $f^{-1}(y)$, soit A la partie de E décrite par ces éléments x ; considérons l'application $g = f/_A$, g est bijective, donc $cardA = cardf(E) \leq cardE$.
De plus $cardA = cardf(E) = cardE$ équivaut à $A = E$ ou encore f est injective. □

Corollaire 1.3 **Si f est une application surjective de E fini dans F. F est fini et :**

$$cardF \leq cardE$$

De plus f est bijective si, et seulement si, $cardF = cardE$.

Démonstration : Il suffit d'appliquer le corollaire précédent à $F = f(E)$. □

Corollaire 1.4 **Si f est une application injective de E dans F. Si $f(E)$ est fini, il est de même de E et $cardf(E) = cardE$.**

Démonstration : L'application g de E sur $f(E)$ qui coincide avec f sur E est une bijection. □
Les résultats précédents peuvent être résumés dans le théorème suivant :

Théorème 1.2 **Étant donné deux ensembles E et F finis de même cardinal et f une application de E dans F, les propriétés suivantes sont équivalentes :**

1. **f est injective.**
2. **f est surjective.**
3. **f est bijective.**

1.2 Opérations sur les ensembles finis. Dénombrement

Théorème 1.3 **La réunion de deux ensembles A et B finis est finie et :**

$$card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B).$$

Démonstration : • Si A et B sont disjointes :
· Si $A = \emptyset$, $\emptyset \cup B = B$, le théorème est vrai et $card(\emptyset \cup B) = card\emptyset + cardB - card(\emptyset \cap B)$
· Supposons le théorème est démontré pour $cardA = n \neq 0$. Soit A une partie à $n+1$ éléments, posons

$$A = \{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}\}$$

et

$$B = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$$

il existe une bijection f de $A\backslash\{x_{n+1}\} \cup B$ sur $[1, c]$, $c = card(A\backslash\{x_{n+1}\} \cup B) = card(A\backslash\{x_{n+1}\}) + card \cup B)$ (hypothèse de récurrence), soit g une application de $A \cup B$ dans $[1, c+1]$ définie par :

$$\forall z \in A\backslash\{x_{n+1}\} \cup B, \;\; g(z) = f(z) \in [1, c]$$

et

$$g(x_{n+1}) = c + 1$$

g est certainement une bijection, donc $A \cup B$ est fini et

$$card(A \cup B) = card[(A\backslash\{x_{n+1}\}) + B] + 1 = c + 1 = cardA + cardB$$

• Si A et B sont quelconques, on a : $A \cup B = A \cup (B\backslash A)$ (réunion disjointes). □

Remarque :

1. E, F, G étant trois ensembles finis, on a :
   card$(E \cup F \cup G) = cardE + cardF + cardG - card(E \cap F) - card(E \cap G) - card(F \cap G) + card(E \cap F \cap G)$
2. A et B étant deux parties d'un ensemble fini E, on a :
   . card$E = cardA + card\bar{A}$ $(\bar{A} = \complement_E^A = E\backslash A)$
   . card$E = card(A \cap B) + card(\bar{A} \cap B) + card(A \cap \bar{B}) + card(\bar{A} \cap \bar{B})$

Corollaire 1.5 **La réunion d'une famille finie d'ensembles finis est finie.**

Démonstration : Démonstration par récurrence. □

Corollaire 1.6 **Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F fini telle que chaque image réciproque d'un élément y de $f(E)$ soit finie alors E est fini.**

Démonstration : Il suffit de vérifier que $E = \bigcup_{y \in F} f^{-1}(y)$ et appliquer le corollaire précédent. □

Corollaire 1.7 **L'ensemble produit de deux ensembles A et B finis est fini et $card(A \times B) = card(A) \times card(B)$.**

Démonstration : Soit deux ensembles finis A et B, considérons l'application :

$$\begin{array}{rccc} pr_1 : & A \times B & \longrightarrow & A \\ & (x, y) & \longrightarrow & x \end{array}$$

$card(pr_1^{-1}\{x\}) = cardB$, car pour x fixe, l'application $y \to (x, y)$ est une bijection, donc le corollaire précédent est applicable et

$$card(A \times B) = \sum_{x \in A} card(pr_1^{-1}\{x\}) = \sum_{x \in A} cardB = cardA \times cardB$$

□

Corollaire 1.8 ***(Généralisation)***
Quels que soient les ensembles finis $E_1, E_2, ..., E_p$, on a :

$$card(E_1 \times E_2 \times ... \times E_p) = cardE_1 \times cardE_2 \times ... \times cardE_p$$

En particulier : $card(E^n) = (cardE)^n$.

2 Analyse combinatoire

On note $E_n \ (n \geq 1)$ un ensemble quelconque fini a n éléments.

2.1 Nombre d'application de E_p sur E_n

Théorème 2.1 **Le nombre d'applications de E_p sur E_n est n^p.**

Démonstration : Posons $\mathcal{F}(E_p, E_n) = E_n^{E_p}$ l'ensemble d'applications de E_p sur E_n. Soit l'application :

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathcal{F}(E_p, E_n) & \longmapsto & E_n \times E_n \times ... \times E_n = E_n^p \\ & f & \longmapsto & (f(a_1), f(a_2), ..., f(a_p)) \end{array}$$

avec

$$E_p = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$$

ψ est bien définie bijective, donc :

$$card\mathcal{F}(E_p, F_n) = cardE_n^p = n^p$$

□

Application : Soit E un ensemble fini à n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ est fini et de cardinal 2^n. En effet, l'application :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathcal{P}(E) & \longmapsto & \{0, 1\}^E \\ & A & \longmapsto & \varphi_A \end{array}$$

est une bijection. Donc $card\mathcal{P}(E) = card(\{0, 1\}^E) = 2^n$.

Définition 2.1 *Soit E un ensemble et p un entier non nul. Un élément $(x_1, x_2, ..., x_p)$ de $E^p = E \times E \times ... \times E$ est appelé parfois une **p-liste** d'éléments de E.*

2.2 Nombre d'injections de E_p sur E_n, ($1 \leq p \leq n$)

Si f est une injection de E_p dans E_n, alors $f(E_p) \subset E_n$ et donc $cardE_p = cardf(E_p) \leq cardE_n$, donc nécessairement $p \leq n$.

Théorème 2.2 **Le nombre d'injections de E_p sur E_n est $n(n-1)...(n-p+1)$, avec $p \leq n$.**

Démonstration : On assimile E_p à l'ensemble $\{1, 2, ..., p\}$.
Pour construire une injection de E_p dans E_n, il faut choisir l'image de 1 parmi n éléments de E_n, une fois l'image de 1 est choisi ; on choisit l'image de 2 différent du choix de l'image de 1, il y a $n-1$ choix, puis on choisit l'image de 3 différent de l'image de 1 et de l'image de 2, et ainsi de suite ..., donc le nombre de choix d'injections vaut :

$$n(n-1)...(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

On note :

$$A_n^p = n(n-1)...(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

□

Applications

Définition 2.2 *Étant donné un ensemble fini E, $cardE = n$, un* ***arrangement*** *de p éléments de E est une p-liste d'éléments deux à deux distincts pris parmi ceux de E.*

Proposition 2.1 **Le nombre de p-arrangements d'un ensemble a n éléments $(1 \leq p \leq n)$ est A_n^p.**

Remarque : · Si $p > n$, $A_n^p = 0$: Il n'y a aucune injection de E_p dans E_n .
· Si $p = n$, $A_n^n = n!$ c'est le nombre d'applications bijectives (***permutations***) de E_p sur E_n, On note leur ensemble $\mathcal{T}_n$.
· Si $p = 0$, on pose par convention $A_n^0 = 1$.

Exemple :

1. Une agence de voyage soumet à ces clients une liste de huit ville. Elle propose de choisir un circuit de cinq villes parmi ces huit, en indiquant l'ordre de visite des cinq villes choisies.
   Le nombre de circuits possibles est $A_8^5 = 336$
2. Combien de classements peut-on former avec 23 élèves (on suppose qu'il n'y a pas d'ex-aequo) : c'est $A_{23}^{23} = 23!$
3. Douze chevaux participent à la course du tiercé. Un tiercé est un triplet$(c_1, c_2, c_3)(c_i \in [1, 12])$. Il y a $A_{12}^3 = 1320$ tiercés possible dans $l'ordre$. (on suppose qu'il n'y a pas d'ex-aequo)

Exercice : Soit $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des bijections de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$. Déterminer le cardinal de l'ensemble E_1=$\{f \in \mathcal{T}_n / \ f(1) = 1\}$.

Solution 1 *Soit $f \in E_1$, on an : $f(1) = 1$, soit f' la restriction de f à $\{2, 3, ..., n\}$, f' est une bijection de $\{2, 3, ..., n\}$.*
Réciproquement, soit g une bijection de $\{2, 3, ..., n\}$ dans $\{2, 3, ..., n\}$. Soit g' la bijection de $\{1, 2, 3, ..., n\}$ définie par :

$$g(1) = 1 \text{ et } g'(i) = g(i), \forall i \in \{2, 3, ..., n\},$$

Il est clair que $g' \in E_1$.
Donc chaque élément de E_1 détermine une et une seule bijection de $\{2, 3, ..., n\}$ et réciproquement, donc il y a autant d'éléments dans E_1 que de bijection de $\{2, 3, ..., n\}$ dans $\{2, 3, ..., n\}$, par conséquent : $cardE_1 = (n-1)!$.

2.3 Nombre de parties ayant p éléments d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini ayant n éléments ($n \geq 1$). Désignons par $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble de parties de E ayant p éléments ($p \leq n$).

***Théorème* 2.3** **Le nombre de parties ayant p éléments d'un ensemble à n éléments $(0 \leq p \leq n)$ est $\frac{n!}{p!(n-p)!}$.**
On note $\complement_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démonstration : *Soient M un ensemble à p éléments et E un ensemble a n éléments. Pour simplifier, on pose $M = [1, p]$ et $E = [1, n]$. Posons $\Im(M, E)$ l'ensemble d'injections de M dans E et $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble de parties de E a p éléments. Soit φ l'application :*

$$\begin{array}{ccc} \Im(M,E) & \longmapsto & \mathcal{P}_p(E) \\ i & \longmapsto & A = i(M) = \{i_1, i_2, ..., i_p\} \end{array}$$

L'application φ est surjective et on a : $\Im(M, E) = \cup_{A \in \mathcal{P}_p(E)} \varphi^{-1}(A)$ (réunion disjointe), d'où card$\Im(M, E) = p!.card\mathcal{P}_p(E)$ puis card$P_p(E) = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \complement_n^p$. □

***Définition* 2.3** *Un sous-ensemble de E de cardinal p est appelé **combinaison** de p éléments distincts pris parmi ceux de E.*

Remarque : *Si $p > n$, $\complement_n^p = 0$, En effet, il n'y a pas de sous-ensemble de E ayant un cardinal strictement supérieure de celui de E.*
Il est clair que quel que soit l'entier naturel n, on a : $\complement_n^0 = \complement_n^n = 1$

Exemples :

1. *L'agence de voyages (l'exemple précédent) propose également à ces clients une formule "liberté" pour laquelle le touriste choisit cinq villes sans préciser l'ordre dans lequel ces villes seront visitées. Le nombre de formules "liberté" est $\complement_8^5 = 56$*
2. *Il y a $\frac{A_{12}^3}{3!} = 220$ tiercés dans le désordre dans une course réunissant douze chevaux.*
3. *Le nombre de tirages de cinq cartes d'un jeu de 52 cartes est $\complement_{52}^5 = 2598\,960$.*

Propriétés des nombres $\complement_n^p$ (Triangle de Pascal)

***Proposition* 2.2** **Étant donné n et p entiers naturels $(0 \leq p \leq n)$, alors $\complement_n^p = \complement_n^{n-p}$ et $\complement_n^p = \complement_{n-1}^p + \complement_{n-1}^{p-1}$.**

Démonstration : *Soit E un ensemble fini à n éléments.*
• *Si $A \subset E$ est une partie à p éléments alors $\bar{A} = \complement_E^A$ est une partie de E a $n - p$ éléments donc l'application :*

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_p(E) & \longmapsto & \mathcal{P}_{n-p}(E) \\ A & \longmapsto & \bar{A} \end{array}$$

est une bijection. Donc $\mathcal{P}_p(E)$ et $\mathcal{P}_{n-p}(E)$ ont même cardinal, c'est à dire : $\complement_n^p = \complement_n^{n-p}$
Autrement dit : Il y a autant de de parties à $n - p$ éléments qu'il y a de parties à p éléments
• *Soit $a \in E$.*
Les parties à p éléments peuvent se regrouper en deux catégories disjointes : d'une part ceux qui contient l'élément a et d'autre part ceux qui ne contient pas a.
Les premiers s'obtient en adjoignant à a n'importe que partie à $p - 1$ éléments de $E \backslash \{a\}$. Il y en a donc $\complement_{n-1}^{p-1}$.
Les autres sont formés de p éléments pris parmi $E \backslash \{a\}$. Il y en a $\complement_{n-1}^p$
En conclusion : $\complement_n^p = \complement_{n-1}^{p-1} + \complement_{n-1}^p$. □

***Théorème* 2.4** $\forall n \in \mathbb{N} : 2^n = \sum\limits_{p=0}^{p=n} \mathrm{C}_n^p$.

Démonstration : *En effet, les ensembles $\mathcal{C}_p$ de parties à p éléments d'un ensemble E à n éléments constituent une partition de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. Donc*

$$\sum_{p=0}^{p=n} card(\mathcal{C}_p) = card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$$

La formule annoncée en résulte, puisque $card(\mathcal{C}) = \mathrm{C}_n^p$. □

Remarque : *Il n'existe pas de surjection d'un ensemble fini E sur l'ensemble des ses parties $\mathcal{P}(E)$, en effet si un tel surjection existe on aura card$E \geq$ card$\mathcal{P}(E)$ ou encore $n \geq 2^n$ avec $n =$ card$E$ ce qui est absurde puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.*

Théorème* 2.5** ***(Formule de binôme de Newton) **Étant donnés a et b réels où complexes et un entier naturel n, alors :**

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} \mathrm{C}_n^p a^{n-p} b^p.$$

Démonstration : *La démonstration se fait par récurrence en utilisant la formule $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_{n-1}^p + \mathrm{C}_{n-1}^{p-1}$.* □

Remarque : *En développant $(a+b)^n$, en déduit que $(a+b)^n$ est une somme de termes du type $x^k b^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$; dans cette somme, le nombre de termes $x^k b^{n-k}$ est C_n^k est égal à C_n^k.*

Exercice : *1. Montrer que*

$$(1) \quad \mathrm{C}_p^p + \mathrm{C}_{p+1}^p + \mathrm{C}_{p+2}^p + ... + \mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_{n+1}^{p+1} \ \ (0 \leq p \leq n)$$

En déduire, à partir de (1), les valeurs de $\sum\limits_{k=1}^{k=n} k$ et $\sum\limits_{k=1}^{k=n} k^2$.
2. En déduire la somme : $S = 1 + 3 + 5 + ... + (2p+1)$.

***Solution* 2** *1. • Montrons par récurrence sur n que $\mathrm{C}_p^p + \mathrm{C}_{p+1}^p + \mathrm{C}_{p+2}^p + ... + \mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_{n+1}^{p+1}$ $(0 \leq p \leq n)$*
Pour $n = 0$, on a : $\mathrm{C}_0^0 = \mathrm{C}_1^1$
La propriété est donc vraie pour $n = 0$, supposons qu'elle est vraie pour n et montrons qu'elle est aussi vraie pour $n+1$.
On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_p^p + \mathrm{C}_{p+1}^p + \mathrm{C}_{p+2}^p + ... + \mathrm{C}_{n+1}^p &= (\mathrm{C}_p^p + \mathrm{C}_{p+1}^p + \mathrm{C}_{p+2}^p + ... + \mathrm{C}_n^p) + \mathrm{C}_{n+1}^p \\ &= \mathrm{C}_{n+1}^{p+1} + \mathrm{C}_{n+1}^p (\textit{hypothèse de récurrence}) \\ &= \mathrm{C}_{n+2}^{p+1} \end{aligned}$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{k=n-p} \mathrm{C}_{p+k}^p = \mathrm{C}_{n+1}^{p+1}$$

• *On remarque que* $k = \mathtt{C}_k^1$, *donc*

$$\mathtt{C}_1^1 + \mathtt{C}_2^1 + \mathtt{C}_3^1 + ... + \mathtt{C}_n^1 = \mathtt{C}_{n+1}^2$$

et par conséquent : $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

• *Pour* $p = 2$, *on obtient :* $\sum\limits_{k=2}^{n} \mathtt{C}_k^2 = \mathtt{C}_{n+1}^3$ *donc* $\sum\limits_{k=2}^{n} (\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k) = \mathtt{C}_{n+1}^3$ *et après simplification, on trouve*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. On a :

$$\begin{array}{rcl} 1 + 2 + ... + (2p+1) & = & (1 + 3 + 5 + ... + (2p+1)) + (2 + 4 + ... + (2p)) \\ & = & S + 2(1 + 2 + ... + p) \\ & = & S + 2\dfrac{p(p+1)}{2} \end{array}$$

D'où, après simplification $S = (p+1)^2$.

• • • • • • • • • • •