Chapitre 11
ESPACES VECTORIELS

(1) GÉNÉRALITÉS

Mohamed TARQI

Table des matières

1 Structures d'espaces vectoriels et d'algèbres **1**
1.1 Structure d'espace vectoriel sur un corps commutatif 1
1.1.1 Définitions et propriétés 1
1.1.2 Règles de calcul dans un espace vectoriel 2
1.2 Espace vectoriel produit 3
1.3 Structure d'algèbre 4

2 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel **4**
2.1 sous-espaces vectoriel 4
2.2 Sous-espaces supplémentaires 6
2.2.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels 6
2.2.2 Sous-espaces supplémentaires 6

3 Applications linéaires **7**
3.1 Définition. Exemples 7
3.2 Premières propriétés des applications linéaires 8
3.3 Projections et symétries vectorielles 10

••••••••••

1 Structures d'espaces vectoriels et d'algèbres

1.1 Structure d'espace vectoriel sur un corps commutatif

1.1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1 *Étant donné un ensemble E et un ensemble Ω. On appelle loi de composition externe entre éléments de E et éléments de Ω, toute application f de $\Omega \times E$ dans E :*

$$(\alpha, x) \longmapsto f(\alpha, x)$$

$f(\alpha, x)$ est le composé de α et de x. On le note $\alpha.x$

Soit E un ensemble non vide muni
1) d'une loi interne notée $+$.
2) d'une loi externe notée $\cdot$
Nous notons $(E, +, \cdot)$ l'ensemble muni de ces deux lois.

Définition 1.2 *On dit que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel si et seulement si les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *$(E, +)$ est un groupe commutatif.*
2. $\forall x \in E$, $1 \cdot x = x$

3. $\forall x\in E$, $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{K}$ *on a :* $\alpha(\beta\cdot x)=(\alpha\beta)\cdot x$
4. *L'opération externe est distributive par rapport à l'addition dans* $\mathbb{K}$ *et par rapport à l'opération interne de* E.

Les éléments de E sont appelés des *vecteurs*, on note parfois le vecteur x par $\vec{x}$, 0_E et $0_{\mathbb{K}}$ représentent provisoirement les éléments zéros de E et $\mathbb{K}$, les axiomes de la structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ s'écrivent donc :

1. $\forall x,y,z\in E$ on a : $(x+y)+z=x+(y+z)$
2. $\forall x,y\in E$ on a : $x+y=y+x$
3. Il existe $0_E\in E$ tel que $\forall x\in E$ on a : $x+0_E=0_E+x=x$.
4. $\forall x\in E$, $\exists x'\in E$: $x+x'=x'+x=0_E$ $(x'=-x)$
5. $\forall x\in E$, $1_{\mathbb{K}}\cdot x=x$
6. $\forall x\in E$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ on a : $\alpha(\beta\cdot x)=(\alpha\beta)\cdot x$
7. $\forall x\in E$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ on a : $(\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x$
8. $\forall x,y\in E$, $\forall\alpha\in\mathbb{K}$ on a : $\alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y$

Exemples :

1. Soit $\overrightarrow{E}$ l'ensemble des vecteurs du plan et $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. $\overrightarrow{E}$ muni des opérations $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}$ et $\alpha\overrightarrow{x}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
2. $(\mathbb{K},+,.)$ est un espace vectoriel sur lui-même .
3. $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Exemple fondamental : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Notons $E=\mathscr{F}(A,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de A à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soient f et g des éléments de E. Rappelons que la somme $f+g$ est par définition l'application qui à tout élément x de A associé le nombre réel $f(x)+g(x)$. Nous savons que, muni de l'addition, E vérifie :
· $\forall f,g,h\in E$ on a : $(f+g)+h=f+(g+h)$
· $\forall f,g\in E$ on a : $f+g=g+f$
· $\forall f\in E$ on a : $f+0_E=0_E+f$ $(0_E$ la fonction nulle)
· $\forall f\in E$ on a : $f+(-f)=(-f)+f=0_E$
D'autre part, on peut définir une application de $\mathbb{R}\times E$ dans E de la manière suivante : pour tout nombre réel α et pour tout élément de E, on note αf l'application qui à tout élément x de A associé le nombre réel $\alpha f(x)$. Il s'agit d'une loi de composition externe. On a les propriétés suivantes :
· $\forall f\in E$ on a : $1.f=f$
· $\forall f,\in E$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ on a : $\alpha(\beta.f)=(\alpha\beta).f$
· $\forall f\in E$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ on a : $(\alpha+\beta).f=\alpha.f.+\beta.f$
· $\forall f,g\in E$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ on a : $\alpha.(f+g)=\alpha.f+\alpha.g$
L'ensemble E, muni de l'addition et de la multiplication externe est un espace vectoriel, cette espace prend le nom d'espace vectoriel des fonctions numériques.

Cas particulier : Lorsque A est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ne sont autres que les suites de nombres réels. L'ensemble E prend alors le nom d'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Exercice : Soit E l'ensemble définie par :

$$E=\{f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ /\ f(x)=(ax+b)e^{3x},\ \ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$$

Montrer que $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1.1.2 Règles de calcul dans un espace vectoriel

Proposition 1.1 **Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.**

1. $\forall x\in E,\ 0_{\mathbb{K}}.x=0_E$ **et** $\forall\alpha\in\mathbb{K},\ \alpha.0_E=0_E$
2. $\forall x\in E,\ \forall\alpha\in\mathbb{K},\ \alpha.x=0\Longleftrightarrow\alpha=0_{\mathbb{K}}$ **ou** $x=0_E$
3. $\forall x\in E,\ \forall\alpha\in\mathbb{K},\ (-\alpha).x=\alpha.(-x)=-(\alpha.x)$

Démonstration :

1. $\forall x \in E$, on a :
$$0_{\mathbb{K}}.x + \alpha x = (0_{\mathbb{K}} + \alpha)x = \alpha x$$
donc
$$0_K.x = \alpha.x - \alpha.x = 0_E$$
de même
$$\alpha.0_E + \alpha.x = \alpha.(0_E + x) = \alpha.x$$
d'où
$$\alpha.0_E = 0_E$$
2. Soit $x \in E$ et $\alpha \in K$ tel que $\alpha.x = 0_E$
Si $\alpha \neq 0$,
$$\alpha^{-1}(\alpha.x) = \alpha^{-1}\alpha.x = \alpha^{-1}.0_E = 0_E$$
or
$$\alpha^{-1}\alpha.x = x$$
d'où
$$x = 0_E$$
3. Si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$ on a :
$$\alpha.x + (-\alpha.x) = [\alpha + (-\alpha)].x = 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$$
de même
$$\alpha.x + \alpha.(-x) = \alpha.[x + (-x)] = \alpha.0_E = 0_E$$
donc :
$$(-\alpha).x = \alpha.(-x) = -(\alpha.x).$$

□

Remarque : D'après ce résultat il n'y aurait aucun inconvénient à désigner 0_E, l'élément zéro de E, et le zéro de $\mathbb{K}$ par même symbole 0.

Proposition 1.2 $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ **et** $\forall(x,y) \in E^2$ **on a :**

1. $(\alpha - \beta).x = \alpha.x - \beta.x$
2. $\alpha.(x - y) = \alpha.x - \alpha.y$

1.2 Espace vectoriel produit

Soit deux espaces vectoriels E et F sur le même corps commutatif, considérons le groupe produit des groupes $(E,+)$ et $(F,+)$, l'addition sur $E \times F$ est définie par :
$$(x,y) + (x',y') = (x + x', y + y')$$
On vérifiera que la multiplication externe définie par l'égalité :
$$\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$$
munit le groupe produit $E \times F$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 1.3 *L'espace vectoriel ainsi définie s'appelle espace vectoriel produit $E \times F$.*

Généralisation : Étant donné n espaces vectoriels $E_1, E_2, ..., E_n$ sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$, les égalités suivantes :
$$(x_1,x_2,...,x_n) + (y_1,y_2,...,y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$
$$\alpha(x_1,x_2,...,x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$$
définissent l'espace vectoriel $E_1 \times E_2 \times, ..., \times E_n$.

Exemple : Si $\mathbb{K}$ est corps commutatif, alors on peut définir l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, l'addition et la multiplication externe sont définis par :
$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n), \;\; y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$ et $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$x + y = (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

$$\alpha x = \alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$$

1.3 Structure d'algèbre

Définition 1.4 *On appelle algèbre ou $\mathbb{K}$-algèbre tout ensemble A muni d'une loi interne notée $(+)$, d'une loi externe notée $(.)$ et d'une troisième loi interne notée $(*)$ telles que :*

1. $(A, +.)$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
2. $(*)$ *est distributive par rapport à l'addition ;*
3. $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall (x, y) \in A^2$, $\alpha(x * y) = (\alpha x) * y = x * (\alpha y)$.

Une $\mathbb{K}$-algèbre est dite :
• associative si, et seulement si, $(*)$ est associative ;
• commutative si, et seulement si, $(*)$ est commutative ;
• unitaire (ou unifère) si, et seulement si, A admet un élément neutre pour $(*)$.

Exemples :

1. Tout corps commutatif $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre associative, commutative, unitaire, en prenant pour troisième loi loi de multiplication.
2. Soit l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^A, +, .)$ des applications numériques, on définit une troisième loi par :
$$\forall x \in A, \; \forall f, g \in \mathbb{R}^A, \; (fg)(x) = f(x)g(x)$$
$\mathbb{R}^A$ est une $\mathbb{R}$-algèbre associative, commutative, unitaire, le neutre pour la troisième loi étant l'application constante égale à 1.

2 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel

2.1 sous-espaces vectoriel

Définition 2.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$, $F \neq \emptyset$. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si F est stable par l'addition et la multiplication externe et a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

Théorème 2.1 **Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie F, non vide, de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\forall x, y \in F, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \;\; \alpha.x + \beta.y \in F$.**

Exemples :

1. Pour tout espace vectoriel E, $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E. Tout sous-espace vectoriel différent de E et $\{0_E\}$ est appelé sous-espace vectoriel $propre$ de E.
2. Soit $F = \{f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R}) : f(0) = 0\}$. F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$, en effet :
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \;\; \forall f, g \in F \;\;\; (\alpha f + \beta g)(0) = \alpha.f(0) + \beta.g(0) = 0$$
3. L'ensemble des suites qui convergent vers 0 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites numériques.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Exemples : Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de E.

1. Ensemble des fonctions paires.
2. Ensemble des fonctions impaires.
3. Ensemble des fonctions continues.
4. Ensemble des fonctions k fois dérivables.

Remarque :

1. Un sous-espace vectoriel de E n'est jamais vide : il contient toujours 0.
2. Pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel, il suffit de montrer qu'il est un sous-espace d'un espace vectoriel bien connu, par exemple pour montrer que l'ensemble
$$S = \{(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$$
est un espace vectoriel il suffit de montrer qu'il est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Théorème 2.2 **Si $E_1, E_2, ..., E_m$ sont des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors $\bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i$ est sous-espace vectoriel de E.**

Démonstration : Soit $(x,y) \in F \times F = \bigcap\limits_{i=1}^{i=n} E_i$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$
alors $\forall i = 1,2,...,n$ $(x,y) \in E_i^2$, et puisque E_i est un sous-espace vectoriel, alors $\lambda x + \mu y \in E_i$ d'où $\lambda x + \mu y \in \bigcap\limits_{i=1}^{i=n} E_i$. □

Définition 2.2 *Soit m ($m \in \mathbb{N}^*$) éléments $x_1, x_2, ..., x_m$ d'un espace vectoriel et m nombres $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$. L'élément $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_m x_m$ de E est appelé $combinaison\ linéaire$ des éléments $x_1, x_2, ..., x_m$ de E ; $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ sont les $coefficients$ respectifs de $x_1, x_2, ..., x_m$ dans cette combinaison linéaire.*

Théorème et définition 2.1 **Étant donné des éléments $x_1, x_2, ..., x_m$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $x_1, x_2, ..., x_m$ est un sous-espace vectoriel de E appelé sous-espace vectoriel $engendré$ par la partie $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ ou par la famille $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$, on le note $Vect(\{x_1, x_2, ..., x_m\})$.**

Démonstration : Soit $x, y \in Vect(\{x_1, x_2, ..., x_m\})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, alors il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$ tels que :
$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i$$
donc
$$\alpha x + \beta y = \sum_{i=1}^{m} (\alpha\lambda_i + \beta\mu_i) x_i \in Vect(\{x_1, x_2, ..., x_m\}).$$
□

Exemples :

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et x un vecteur de E, non nul.
$$Vect(x) = \{\lambda x \;/\; \lambda \in \mathbb{K}\}.$$
C'est la $droite\ vectoriele$ engendrée par x.
2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$
Soit $a = (1,-2,3), b = (0,3,-1)$
$$Vect\{a,b\} = \{\lambda a + \mu b \;/\; (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\} = \{(\lambda, -2\lambda + 3\mu, 3\lambda - \mu) \;/\; (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$$
3. Dans l'espace vectoriel $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel engendré par $x \longrightarrow e^{-2x}$ et $x \longrightarrow e^{3x}$ est l'ensemble $\{x \longrightarrow ae^{-2x} + be^{3x} : (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$
4. On a :
$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= \{x + iy \;/\; (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= Vect(\{1,i\}) \end{aligned}$$
donc $\mathbb{C}$ est considéré comme un espace vectoriel engendré par 1 et i.

5. $\mathbb{K}_n[X] = Vect(\{1, X, X^2, ..., X^n\})$
6. $\mathbb{K}^n = Vect(\{e_1, e_2, ..., e_n\})$ avec $e_1 = (1,0,...,0)$, $e_2 = (0,1,...,0), ...,$ $e_n = (0,0,...,1)$

Définition 2.3 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$ de E est appelée $famille$ génératice de E si et seulement si le sous-espace vectoriel engendré par $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$ est l'espace vectoriel lui-même.*

Remarque : On a vu que l'ensemble F des combinaisons linéaires de $a_1, a_2, ..., a_m$ est un sous-espace vectoriel de E ; et on a $F \subset E$. Donc pour démontrer que $F = E$, il suffit de démontrer que $E \subset F$ c'est à dire que tout élément de E est une combinaison linéaire de $a_1, a_2, ..., a_m$.

Exemple : $\mathbb{K}^n = Vect(\{e_1, e_2, ..., e_n\})$ avec $e_1 = (1,0,...,0), e_2 = (0,1,...,0), ..., e_n = (0,0,...,1)$, donc $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$

2.2 Sous-espaces supplémentaires

2.2.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 2.4 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle la somme de F et G, l'ensemble $F + G = \{x + y \ / \ x \in F \ \text{ et } \ y \in G\}$*

Théorème 2.3 **La somme de deux sous-espaces vectoriels F et G est un sous-espace vectoriel.**

Démonstration : Soient F et G deux sous-espaces de E. $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \forall(x,y) \in F \times G$ on a :

$$\alpha x + \beta y = x' + y' \ \ avec \ \ (x', y') \in F \times G$$

donc $\alpha x + \beta y \in F + G$ et un par conséquent $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E. □

2.2.2 Sous-espaces supplémentaires

Définition 2.5 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. $F + G$ est dite $somme \ directe$ si $F \cap G = \{0_E\}$.*

Théorème 2.4 **Deux sous-espaces vectoriels F et G sont en somme directe si et seulement si tout $x \in F + G$ s'écrit d'une manière $unique$ sous la forme $x = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$.**

Démonstration : Supposons que $x = f + g = f' + g'$ avec $f, f' \in F$ et $g, g' \in G$, donc $0 = (f - f') + (g - g')$ donc

$$f' - f = g' - g \in F \cap G = \{0_E\} \Longrightarrow f = f' \ \text{ et } \ g = g',$$

d'où l'unicité de l'écriture

$$x = f + g.$$

Réciproquement, soit $x \in F \cap G$
alors

$$x = 0 + x = x + 0$$

et par unicité $x = 0$, donc

$$F \cap G = \{0_E\}$$

□

Corollaire 2.1 *F et G sont en somme directe si et seulement si $\forall f \in F, \forall g \in G$*

$$(f + g = 0_E \Longrightarrow f = g = 0_E)$$

.

Définition 2.6 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{k}$-espace vectoriel E. F et G sont dits supplimentaires si ils sont en somme directe et $F + G = E$. On note $F \oplus G = E$*

Remarque :

$$F \oplus G = E \Longleftrightarrow \begin{cases} F + G = E \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$$

Exercice : Soit $E = \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, avec I un intervalle symétrique par rapport à 0, l'espace vectoriel des fonction numériques. Montrer que E est somme directe des sous-espaces vectoriels des fonctions pairs et des fonctions impaires.

3 Applications linéaires

3.1 Définition. Exemples

Définition 3.1 *Étant donnés deux espaces vectoriels E et F sur $\mathbb{K}$. On appelle application linéaire de E dans F toute application f de E dans F vérifiant :*
(1) $\forall x \in E, \forall y \in E \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$
(2) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$
Si $E = F$ on dit que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel E. Si l'application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est bijective, c'est un isomorphisme de E sur F, si de plus $E = F$, on dit que f est un automorphisme de E.

Notations : L'ensemble des applications linéaires de E dans F sera noté par $\mathscr{L}(E,F)$, l'ensemble est des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(E)$ au lieu de $\mathscr{L}(E,E)$, enfin on note $\mathscr{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E

Remarque : $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire si, et seulement si, $\forall x \in E, \forall y \in E \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

Exemples :

1. On considére $\mathbb{R}$ comme espace vectoriel sur lui même, soit f l'application,$a \in R$:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax \end{array}$$

   f est une application linéaire, d'une manière générale, soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application :

$$h_\lambda : \begin{array}{ccc} E & \longmapsto & E \\ x & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

   est linéaire, appelée *homothétie de rapport* λ.

2. Si $E = E_1 \times E_2$ les applications pr_1 et pr_2 définies par :

$$pr_1(x_1,x_2) = x_1 \text{ et } pr_2(x_1,x_2) = x_2$$

   sont des applications linéaires de $E_1 \times E_2$ respectivement dans E_1 et dans E_2.

3. Soit $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$, soit f l'application définie de E dans F par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \ \ f(x,y) = (2x - y, -x + 3y, 2x - 3y)$$

   f est une application linéaire, en effet : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall (x',y') \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(\alpha(x,y) + \beta(x',y')) &= f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') \\ &= (2(\alpha x + \beta x') - \alpha y + \beta y', -\alpha x - \beta x' + 3(\alpha y + \beta y'), \\ &\quad 2(\alpha x + \beta x') - 3(\alpha y + \beta y')) \\ &= \alpha(2x - y, -x + 3y, 2x - 3y) + \beta(2x' - y', -x' + 3y', 2x' - 3y') \\ &= \alpha f(x,y) + \beta f(x',y') \end{aligned}$$

4. L'application Γ de $\mathbb{k}[X]$ dans $\mathbb{k}[X]$ définie par $\Gamma(P) = P'$ est linéaire.

Définition 3.2 *On appelle forme linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ considéré comme espace vectoriel.*

Exemple : L'application Φ de l'espace vectoriel des fonctions intégrales au sens de Riemann sur le segment $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\Phi(f)=\int_a^b f(t)dt$ est une forme linéaire.

3.2 Premières propriétés des applications linéaires

Théorème 3.1 **Pour toute application linéaire f de E dans F.**

1. **$f(0_E)=0_F$ et pour tout x de E on a $f(-x)=-f(x)$.**
2. **Si A est sous-espace vectoriel de E, $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F.**
3. **Si B est sous-espace vectoriel de F, $f^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de E.**

Démonstration :

1. $\forall x\in E$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0_E+x) \\ &= f(0_E)+f(x) \end{aligned}$$

on en déduit que $f(0_E)=0_F$.

2. $\forall x\in E$,

$$\begin{aligned} f(0_E) &= f(x-x) \\ &= f(x)+f(-x) \\ &= 0_F \end{aligned}$$

donc $f(-x)$ est l'opposé de $f(x)$ dans F, c'est à dire $f(-x)=-f(x)$.

3. Soit A un sous-espace vectoriel de E, x' et y' des éléments de $f(A)$, il existe alors x et y de A tels que $x'=f(x)$ et $y'=f(y)$, d'où pour tout $\alpha\in\mathbb{K}$:

$$f(x-y)=f(x)-f(y)=x'-y' \text{ et } f(\alpha x)=\alpha f(x)=\alpha x'$$

donc $x'-y'$ et $\alpha x'$ appartiennent à $f(A)$ qui est donc un sous-espace vectoriel de F.

4. Soit B un sous-espace vectoriel de F, x et y deux éléments de $f^{-1}(B)$, $f(x)$ et $f(y)$ appartiennent à B, d'où pour tout $\alpha\in\mathbb{K}$.

$$f(x)-f(y)=f(x-y) \text{ et } \alpha f(x)=f(\alpha x)$$

appartiennent à B, donc $x-y$ et αx appartiennent à $f^{-1}(B)$ qui est donc un sous-espace vectoriel de E.

$\square$

Définition 3.3 *On appelle noyau d'une application linéaire f de E dans F l'ensemble $\{x\in E\ /f(x)=0\}$ et image de f l'ensemble $\{f(x)\ /\ x\in E\}$. Et on note :*

$$\ker f=\{x\in E\ \ f(x)=0_F\}\ \ Imf=\{f(x)/x\in E\}$$

Exercice : Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, définie par :

$$f(x,y)=(2x-y,x+y,3x-4y)$$

Déterminer $\ker f$ et Imf.

Proposition 3.1 **Soit f une application linéaire de E dans F. $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E et Imf est un sous-espace vectoriel de F.**

Démonstration : $\cdot$ $\forall \alpha,\beta \in K$, $\forall x,y \in \ker f$, on a : $f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)=0_F$
$\cdot$ Soit $y,y' \in Imf$ et $\alpha,\beta \in K$, alors $\exists x,x' \in E$ tels que : $f(x)=y$ et $f(x')=y'$

$$\alpha y+\beta y' = \alpha f(x)+\beta f(x') = f(\alpha x+\beta x')$$

donc $\alpha y+\beta y' \in Imf$. □

Théorème 3.2 **Pour toute application linéaire f de E dans F les proptiétés suivantes sont équivalentes :**

1. **L'application f est injective.**
2. $\ker f = \{0_E\}$.

Démonstration : (1) $\Longrightarrow$ (2) Soit $x \in \ker f$, $f(x)=0_F=f(0_E)$ et puisque f est injective, alors $x=0_E$.
(2) $\Longrightarrow$ (1) Soit x et y de E tels que $f(x)=f(y)$
alors

$$f(x-y)=0_F \Longleftrightarrow x-y \in \ker f$$

donc si $\ker f=\{0_E\}$, $x-y=0_E$ et par suite $x=y$. □

Proposition 3.2 **Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. Si f et g de $\mathscr{L}(E,F)$ et α, β des scalaires, alors $\alpha f+\beta g$ appartient à $\mathscr{L}(E,F)$. Autrement dit $\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel.**

Soient trois $\mathbb{k}$-espaces vectoriels E,F,G. Considérons l'application $h=g\circ f$ composée des applications linéaires g et f, avec $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$

$$E \xrightarrow{f} \underset{\xrightarrow{h=g\circ f}}{F} \xrightarrow{g} G$$

$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{k}$, $\forall (x,y) \in E^2$ on a :

$$\begin{array}{rcl} h(\alpha x+\beta y) & = & g[f(\alpha x+\beta y)] \\ & = & g[\alpha f(x)+\beta f(y)] \\ & = & \alpha g[f(x)]+\beta g[f(y)] \\ & = & \alpha g\circ f(x)+\beta g\circ f(y) \\ & = & \alpha h(x)+\beta h(y) \end{array}$$

Théorème 3.3 **L'application composée de deux applications linéaires est une application linéaire.**

Corollaire 3.1 $(\mathscr{L}(E),+,.,\circ)$ **est une $\mathbb{K}$-algèbre associative et unitaire.**

Démonstration : En effet,
• $(\mathscr{L}(E),+,.)$ est un espace vectoriel.
• $(\circ)$ est distributive par rapport à l'addition.
• $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall f,g \in \mathscr{L}(E)$

$$\alpha(g\circ f)=(\alpha g)\circ f = g\circ(\alpha f)$$

• $\forall f,g,h \in \mathscr{L}(E)$,

$$f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$$

• $\forall f \in \mathscr{L}(E)$,

$$f\circ id_E = id_E\circ f = f$$

□

Définition 3.4 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $E = F \oplus G$, Pour tout vecteur u de E il existe un unique $v \in F$ et un unique $w \in G$ tels que $u = v + w$.*

1. *L'application $p : u \longrightarrow v$ est la projection sur F, parallèlement à G.*
2. *L'application $s : u \longrightarrow v - w$ est la symétrie par rapport à F, parallèlement à G.*

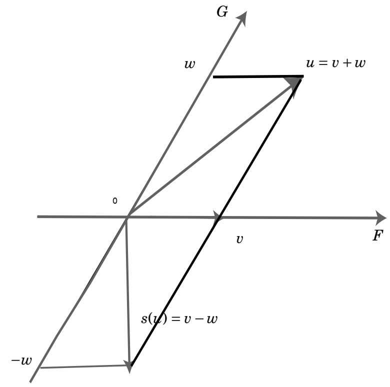

FIGURE 1 – La symétrie par rapport à F, parallèlement à G.

Remarque : Dans l'algèbre $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$, si $f \circ g = g \circ f$, on la formule de binôme

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n f^{n-k} \circ g^k$$

en particulier $\forall f \in \mathscr{L}(E)$

$$(Id_E + f)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n f^k$$

Proposition 3.3 **Soit f un isomorphisme de E dans F, alors la bijection réciproque f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.**

Corollaire 3.2 **Soit E un espace vectoriel, alors $(\mathscr{GL}(E), \circ)$ est un groupe, en général ce groupe n'est pas commutatif.**

Remarque : $(\mathscr{GL}(E), \circ)$ n'est autre que le groupe des éléments inversibles de l'anneau $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$.

3.3 Projections et symétries vectorielles

Proposition 3.4

1. **p est un endomorphisme de E, et il vérifie $p \circ p = p$**
2. **s est un automorphisme de E et $s \circ s = id$. Ainsi s est involutif.**

Démonstration : Pour tout vecteur u de E il existe un unique $v \in F$ et un unique $w \in G$ tels que $u = v + w$ donc

$$p \circ p(v+w) = p(v) = p(v+w)$$

et

$$s \circ s(v+w) = s(v-w) = v - (-w) = v + w = u = id(u).$$

s est bijective car elle est injective et surjective puisque $s^2 = id$. □

Remarque : On a la relation suivante entre p et s : $s = 2p - id_E$.

Définition 3.5 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle projecteur de E tout endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$.*

••••••••••