Chapitre 12
ESPACES VECTORIELS

(2) NOTION DE LA DIMENSION

Mohamed TARQI

Table des matières

••••••••••

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. En pratique, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

1 Indépendance linéaire

1.1 Indépendance linéaire

Soit $\{a_1,a_2,...,a_m\}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.

Définition 1.1 *La famille $\{a_1,a_2,...,a_m\}$ et dite* **libre** *ou les éléments $a_1,a_2,...,a_m$ sont* **linéairements indépendants** *si et seulement si $\forall \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m\in\mathbb{K}$ on a :*

$$(\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+...+\alpha_ma_m=0_E)\Longrightarrow(\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_m=0)$$

Dans le cas contraire, la famille est dite **liée** *ou les vecteurs sont* **linéairement dépendants**

Exemples :

1. Soit $a=(3,2)$ et $b=(1,-2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$. a et b sont linéairement indépendants, en effet, cherchons λ,μ tels que : $\lambda(3,2)+\mu(1,-2)=(0,0)$

$$\lambda(3,2)+\mu(1,-2)=(0,0)\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{c}3\lambda+\mu=0\\2\lambda-2\mu=0\end{array}\right.\Longrightarrow\lambda=\mu=0$$

2. Soit $a=(-2,4)$ et $b=(1,-2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$. a et b sont linéairement dépendants, par exemple $a=-2b$

3. $E=\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f(x)=e^{2x}$, $g(x)=e^{-x}$, f et g sont linéairement indépendants, en effet, soit α et $\beta\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha f+\beta g=0_E$

$$\alpha f+\beta g=0 \Longleftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}, \alpha e^{2x}+\beta e^{-x}=0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha+\beta=0\\ 2\alpha-\beta=0\end{array}\right. \Longrightarrow \alpha=\beta=0$$

Définition 1.2 *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille (éventuellement infinie) d'éléments de E.*

1. *On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est libre si, et seulement si, toute sous-famille finie de $(x_i)_{i\in I}$ est libre.*
2. *On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est liée si, et seulement si, s'il existe une sous-famille finie de $(x_i)_{i\in I}$ qui soit liée.*

Exemple : $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, $f_\alpha : x\longrightarrow e^{\alpha x}$. La famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre, en effet :
Soit $\{f_{\alpha_1},f_{\alpha_2},\dots,f_{\alpha_n}\}$ une sous-famille finie de $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$, avec $\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n$ et $(\lambda_i)_{1\le i\le n}$ tels que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e^{\alpha_i x}=0$$

Alors, $\lambda_n=-\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i e^{(\alpha_i-\alpha_n)x}$, d'où par passage à la limite en $+\infty$: $\lambda_n=0$. En réitérant, on obtient $\lambda_n=\lambda_{n-1}=\dots=\lambda_1=0$.

Théorème 1.1 **Une famille est liée si, et seulement si, il existe un de ces éléments qui soit une combinaison linéaire finie des autres éléments de la famille.**

Démonstration : Soit une famille $(a_i)_{1\le i\le p}$ liée, il existe une famille de scalaires $(\alpha_i)_{1\le i\le p}$ non tous nuls tels que :

$$\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\dots+\alpha_p a_p=0$$

supposons, en changeant au besoin le numérotage $\alpha_p\neq 0$, d'où :

$$\begin{aligned} a_p &= -\alpha_p^{-1}(\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\dots+\alpha_{p-1}a_{p-1})\\ &= (-\alpha_p^{-1}\alpha_1)a_1+(-\alpha_p^{-1}\alpha_2)a_2+\dots+(-\alpha_p^{-1}\alpha_{p-1})a_{p-1})\\ &= \beta_1 a_1+\beta_2 a_2+\dots+\beta_{p-1}a_{p-1}\end{aligned}$$

En particulier si une famille à deux éléments non nuls est liée, il existe un scalaire λ tel que $a_2=\lambda a_1$: on dit que a_1 et a_2 sont colinéaires. □

Corollaire 1.1 **$\{a_1,a_2,\dots,a_p\}$ étant une partie libre de p éléments et $\{a_1,a_2,\dots,a_p,x\}$ une partie liée, x appartient au sous-espace engendré par $\{a_1,a_2,\dots,a_p\}$ et l'on a**

$$x=\mu_1 a_1+\mu_2 a_2+\dots+\mu_p a_p$$

d'une manière unique.

Démonstration : En effet, on a :

$$\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\dots+\alpha_p a_p+\alpha x=0$$

$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p,\alpha$ n'étant pas tous nuls. $\alpha\neq 0$, sinon on aurait $\alpha=0$ et l'un des scalaires $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p$ serait non nul, donc la partie $\{a_1,a_2,\dots,a_p\}$ serait liée. On aura donc

$$x=\mu_1 a_1+\mu_2 a_2+\dots+\mu_p a_p$$

Supposons

$$\mu_1 a_1+\mu_2 a_2+\dots+\mu_p a_p=\mu_1' a_1+\mu_2' a_2+\dots+\mu_p' a_p$$

on aura :

$$(\mu_1-\mu_1')a_1+(\mu_2-\mu_2')a_2+\dots+(\mu_p-\mu_p')a_p=0$$

donc $\mu_i-\mu_i'=0$ pour tout i, puisque la partie $\{a_1,a_2,\dots,a_p\}$ est libre. □

Théorème 1.2 **Soit $\mathscr{L}=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$ une partie libre à m éléments de E et $\mathscr{G}=\{g_1,g_2,\dots,g_p\}$ une partie génératrice de E. Alors $m\le p$ et en changeant éventuellement le numérotage $i\longrightarrow g_i$, $\mathscr{G}'=\{a_1,a_2,\dots,a_m,g_{m+1},\dots,g_p\}$ est encore une partie génératrice de E.**

Démonstration : En effet :

$$a_1 = \mu_1^1 g_1 + \mu_2^1 g_2 + \ldots + \mu_p^1 g_p$$

au moins l'un des μ_i^1 est non nul sinon $a_1 = 0$ et $\mathscr{L}$ ne serait pas libre, en changeant le numérotage, on peut supposer $\mu_1^1 \neq 0$, donc :

$$g_1 = \alpha_1^1 a_1 + \alpha_2^1 g_2 + \ldots + \alpha_p^1 g_p$$

Il en résulte que $\mathscr{G}_1 = \{a_1, g_2, \ldots, g_p\}$ une partie génératrice de E, en particulier

$$a_2 = \mu_1^2 a_1 + \mu_2^2 g_2 + \ldots + \mu_p^2 g_p$$

au moins l'un des μ_i^2, $i = 2, 3, \ldots, p$ est non nul, car si $\mu_2^2 = \ldots = \mu_p^2 = 0$, on aurait $a_2 = \mu_1^2 a_1$ et $\mathscr{L}$ ne serait pas libre, en changeant au besoin le numérotage nous pouvons supposer $\mu_2^2 \neq 0$, donc :

$$g_2 = \alpha_1^2 a_1 + \alpha_2^2 a_2 + \alpha_3^2 g_3 + \ldots + \alpha_p^2 g_p$$

donc $\mathscr{G}_2 = \{a_1, a_2, g_3, \ldots, g_p\}$ est encore une partie génératrice de E ; en recommençant un nombre fini de fois cette opération, nous voyons que : $\mathscr{G}_{p'} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{p'}, g_{p'+1}, \ldots, g_p\}$, avec $p' \leq \inf\{m, p\}$ est une partie génératrice de E.
Montrons que $m \leq p$, supposons le contraire, dans ce cas en prenant $p' = p$:

$$\mathscr{G}_p = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$$

engendrerait E et les éléments $a_{p+1}, \ldots, a_m$ seraient des combinaisons linéaires de $a_1, a_2, \ldots, a_p$, donc $\mathscr{L}$ ne serait pas libre.
Donc au bout d'un nombre fini d'opérations, nous arriverons à la partie génératrice :

$$\mathscr{G}_m = \{a_1, a_2, \ldots, a_m, g_{m+1}, \ldots, g_p\}$$

. □

Corollaire 1.2 **Soit G une partie génératrice, à p éléments, de E, alors toute partie de E ayant strictement plus de p éléments est liée.**

Remarque : Le corollaire précédent peut s'exprimer sous la forme équivalente : Toute partie contenant $p+1$ vecteurs de E qui sont des combinaisons linéaires de p vecteurs quelconques de E est liée.

1.2 Bases d'un espace vectoriel de dimension finie

Définition 1.3 *On dit que E est de dimension finie, s'il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.*

Théorème 1.3 **(et définition)Pour toute partie $\mathscr{B}$ non vide de E, de dimension finie, les propriétés suivante sont équivalentes :**

1. **$\mathscr{B}$ est une partie génératrice libre de E**
2. **$\mathscr{B}$ est une partie génératrice minimale de E**
3. **$\mathscr{B}$ est une partie génératrice maximale de E.**

Toute partie $\mathscr{B} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ possédant l'une de ses propriétés est appelée une base de E. Pour tout x de E il existe une famille unique de scalaires α_i $(1 \leq i \leq n)$ tels que :

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont appelés les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.

Démonstration : Soit $\mathscr{G}_m = \{g_1, g_2, ..., g_p\}$ une partie génératrice minimale de E à p éléments, donc elle est libre.
Réciproquement, soit $\mathscr{B} = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$ une partie libre et génératrice, nous allons montrer que c'est une partie génératrice minimale ; sinon un des ses éléments serait combinaison linéaire des autres et $\mathscr{B}$ ne serait plus une partie libre.
D'autre part x étant un élément quelconque de E et $\mathscr{B} = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$ une partie génératrice libre, donc minimale, donc $\{a_1, a_2, ..., a_p, x\}$ est une partie liée, sinon $\{a_1, a_2, ..., a_p\}$ n'engendrerait pas E ; $\mathscr{B}$ est donc une famille libre maximale.
Réciproquement, soit $\mathscr{L}_M = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ une partie libre maximale, c'est-à-dire libre telle que pour tout x de E, $\mathscr{L}_M \cup \{x\}$ soit liée, donc $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ est une partie génératrice et libre. □

1.3 Existence de bases pour un espace de dimension finie

Théorème 1.4 **Tout espace vectoriel E de dimension finie, non réduit à $\{0\}$, admet une base ; d'une façon plus précise $\mathscr{G}$ étant une partie génératrice de E et $\mathscr{L}$ une partie libre de E contenue dans $\mathscr{G}$, il existe une base $\mathscr{B}$ telle que :**

$$\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{G}$$

Démonstration : E étant de dimension finie non réduit à $\{0\}$, admet au moins une partie génératrice finie $\mathscr{G} = \{g_1, g_2, ..., g_p\}$ de p éléments que l'on peut supposer non nuls. Il y a donc des parties de $\mathscr{G}$ qui sont libres, par exemple $\{g_1\}$, soit $\mathscr{L}$ une d'entre elles ; donc $\mathscr{L} \subset \mathscr{G}$.
Si $\mathscr{L}$ engendre E, c'est une base. Si $\mathscr{L}$ n'engendre pas E, il existe g_{i_1} de $\mathscr{G} \setminus \mathscr{L}$ n'appartient pas au sous-espace F engendré par $\mathscr{L}$, car si tous les éléments de $\mathscr{G} \setminus \mathscr{L}$ appartient à F, $\mathscr{L}$ engendrerait E ; posons :

$$\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}, \quad \mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_0 \cup \{g_{i_1}\}$$

$\mathscr{L}$ est libre, sinon $g_{i_1} \in F$, donc :

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 \subset \mathscr{L}_1 \subset G$$

Si $\mathscr{L}_1$ engendre E, $\mathscr{L}_1$ est une base de E. Si $\mathscr{L}_1$ n'engendre pas E, nous pouvons recommencer le raisonnement, il existe $g_{i_2} \in \mathscr{G} \setminus \mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_1 \cup \{g_{i_2}\}$ est libre et :

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 \subset \mathscr{L}_1 \subset \mathscr{L}_2 \subset \mathscr{G}$$

nous pouvons ainsi construire une suite finie strictement croissante de parties libres de E, toutes contenus dans G :

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 \subset \mathscr{L}_1 \subset \mathscr{L}_2 \subset ... \subset \mathscr{L}_k \subset \mathscr{G}$$

$\mathscr{G}$ étant finie, il existe donc m tel que $\mathscr{L}_{m-1}$ soit une partie libre n'engendre par E et $\mathscr{L}_m$ libre engendrant E, $\mathscr{L}_m$ sera donc une base de E. □

Corollaire 1.3 **Soit $\mathscr{L}$ une partie libre de E et $\mathscr{G}$ une partie génératrice. Alors il existe une partie $\mathscr{H}$ de $\mathscr{G}$ telle que $\mathscr{L} \cup \mathscr{H}$ soit une base de E.**

Démonstration : $\mathscr{G} \cup \mathscr{L}$ engendre E et $\mathscr{L} \subset \mathscr{G} \cup \mathscr{L}$, il existe donc une base $\mathscr{B}$ telle que :

$$\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{G} \cup \mathscr{L}$$

Tous ces parties sont finis, il existe donc une partie $\mathscr{H}$ telle que $\mathscr{B} = \mathscr{L} \cup \mathscr{H}$. □

Remarque : Ce résultat est connu sous le nom de théorème de la base incomplète : la partie libre $\mathscr{L}$ ayant été complétée par un certain nombre d'éléments de $\mathscr{G}$.

2 Dimension d'un espace vectoriel

2.1 Dimension d'un espace vectoriel

Théorème et définition 2.1 **Si E admet une base ayant n éléments alors toute base de E a n éléments. l'entier naturel n est appelé *dimension* de E et on note $n = \dim E$.**

Démonstration : Soit $\mathscr{B}$ une base de E et n le nombre de ces éléments. Soit $\mathscr{B}'$ une autre base ayant n' éléments, $\mathscr{B}'$ est une partie libre de E et ses éléments sont des combinaisons linéaires des éléments de $\mathscr{B}$, donc : $n' \leq n$, de même $n' \leq n$. □

Remarque : $\{0\}$ est un espace vectoriel à un seul élément, on posera par définition :

$$\dim\{0\} = 0$$

Exemples :

1. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. En effet tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, donc $\{1, i\}$ forme une base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{K}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On appelle base canonique de $\mathbb{K}^n$ la base $B = (e_i)_{i=1,2,\dots,n}$ avec $e_i = (0, \dots, \underbrace{1}_{\text{la position } i}, \dots 0)$.
3. $\mathbb{K}_n[X]$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$, par exemple $\{1, X, X^2, \dots, X^n\}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Proposition 2.1 **$f : E \longrightarrow F$ une application linéaire bijective, alors :**

1. **L'image d'une base de E est une base de F.**
2. $\dim E = \dim F$

Démonstration : Soit $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E, avec $n = \dim E$, montrons que $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$ est une base de F.
Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \dots + \lambda_n f(e_n) = 0_F$$

alors

$$f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n) = 0_F$$

et comme f est une bijection alors :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0_E$$

donc

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

On en déduit que $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$ est une base de F et $\dim F = \dim E$. □

Théorème 2.1 **Tout espace vectoriel de E de dimension n sur $\mathbb{K}$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.**

Démonstration : Soit $\{e_1, e_1, \dots, e_n\}$ une base de E, pour tout x de E il existe une famille unique $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de scalaires telle que :

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

Considérons maintenant l'application E dans $\mathbb{K}^n$ définie par :

$$f(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

il est clair que f est une bijection de plus si

$$f(y) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

alors

$$f(x+y) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = f(x) = f(y)$$

et

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda f(x)$$

Donc cette application est un isomorphisme de E dans $\mathbb{K}^n$. Autrement dit il existe une seule structure d'espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$: celle de $\mathbb{K}^n$. □

Corollaire 2.1 **Deux espaces vectoriels E et F de dimension finie sur le même corps $\mathbb{K}$ sont isomorphes si, et seulement si, ils ont même dimension par rapport à $\mathbb{K}$.**

Démonstration : En effet, il existe un isomorphisme f de E dans $\mathbb{K}^n$ et un isomorphisme g de F dans $\mathbb{K}^n$, donc l'application $g^{-1} \circ f$ est un isomorphisme de E dans F. □

De la définition de la dimension et du corollaire précédent on déduit le théorème :

Théorème 2.2 **Dans un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$:**

1. **Toute partie libre a au plus n éléments.**
2. **Toute partie ayant $n+1$ éléments est liée.**

E et F étant deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, supposons $\dim E = n$ et soit $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base E. On le résultat suivant :

Proposition 2.2 **Il existe une unique application linéaire f de E dans F, telle que :**

$$(\forall i \in \{1, 2, ..., n\}) \qquad f(e_i) = f_j$$

$f_1, f_2, ..., f_n$ étant n éléments quelconques de F.

Démonstration : Supposons qu'une telle application existe, nous aurons d'une manière unique :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \Longrightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

Réciproquement l'application de E dans F définie par :

$$x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

est linéaire, donc f existe et est unique. □

Proposition 2.3 **E et F étant deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de dimensions respectives finies n et m. Alors $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.**

Démonstration : Soient $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E et $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ une base de F. Soit (x, y) un élément quelconque de $E \times F$, alors il existe deux familles uniques $(x_1, x_2, ..., x_n)$ et $(y_1, y_2, ..., y_m)$ telles que :

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$$

et

$$y = y_1 f_1 + y_2 f_2 + ... + y_m f_m$$

donc

$$(x, y) = x_1(e_1, 0) + x_2(e_2, 0) + ... + x_n(e_n, 0) + y_1(0, f_1) + y_2(0, f_2) + ... + y_m(0, f_m)$$

Autrement dit, la famille $((e_i, 0) \cup (0, f_j))_{(1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq m)}$ est une base de $E \times F$, donc

$$\dim(E \times F) = n + m = \dim E + \dim F.$$

□

Remarque : Le résultat précédent se généralise à p espaces vectoriels, de dimensions finies sur $\mathbb{K}$:

$$\dim(E_1 \times E_2 \times ... \times E_p) = \dim E_1 + \dim E_2 + ... + \dim E_p.$$

2.2 Dimension de $\mathscr{L}(E, F)$

Proposition 2.4 **Soient E, F deux espaces vectoriels de dimensions finies sur $\mathbb{K}$. Alors $\mathscr{L}(E, F)$ est de dimension finie et :**

$$\dim \mathscr{L}(E, F) = \dim(E) . \dim(F)$$

Démonstration : Notons $n = \dim E$, $m = \dim F$, $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E et $\mathscr{C} = \{f_1, f_2, ..., f_m\}$ une base de F.
Pour chaque couple (i, j), notons φ_{ij} l'élément de $\mathscr{L}(E,F)$ définie par :

$$\varphi_{ij}(e_k) = \delta_{kj} f_i$$

où est le symbole de *Kronecker.*
Montrons que la famille

$$(\varphi_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le m}$$

est une base de $\mathscr{L}(E,F)$.

1. Soit $(\mu_{ij})_{1\le i\le n,1\le j\le m} \in \mathbb{K}^{nm}$ tel que
$$\sum_{1\le i\le n, 1\le j\le m} \mu_{ij}\varphi_{ij} = 0.$$
On a alors, pour tout k de $\{1,2,...,n\}$:
$$\begin{aligned} 0 &= (\sum_{1\le i\le n,1\le j\le m} \mu_{ij}\varphi_{ij})(e_k) \\ &= \sum_{1\le i\le n,1\le j\le m} \mu_{ij}\varphi_{ij}(e_k) \\ &= \sum_{1\le i\le n,1\le j\le m} \mu_{ij}\delta_{kj} f_i \\ &= \sum_{1\le i\le n} \mu_{ik} f_i \end{aligned}$$
Comme $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ est libre, on déduit : $\forall k$ et i, $\mu_{ik} = 0$. Ceci montre que la famille est libre.
2. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Pour chaque j, $f(e_j)$ se décompose dans la base $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ de F et il existe donc $(\mu_{1j}, ..., \mu_{mj}) \in \mathbb{K}^m$ tel que :
$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} \mu_{ij} f_i$$
On alors :
$$\forall k \in \{1,2,...,n\},\ \ (\sum_{1\le i\le n,1\le j\le m} \mu_{ij}\varphi_{ij})(e_k) = \sum_{1\le i\le n} \mu_{ik} f_i = f(e_k)$$
d'où
$$f = \sum_{1\le i\le n,1\le j\le m} \mu_{ij}\varphi_{ij}$$
Donc la famille $(\varphi_{ij})_{ij}$ engendre $\mathscr{L}(E,F)$. Finalement, $(\varphi_{ij})_{ij}$ est une base de $\mathscr{L}(E,F)$ et :
$$\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim(E).\dim(F)$$

□

2.3 Dimension d'un sous-espace vectoriel de E

Proposition 2.5 **Si E est de dimension n, tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie $p \le n$. De plus $F = E$ si, et seulement si, $n = p$.**

Démonstration : Si $F = \{0\}$, $\dim F = 0$ et si $E = \{0\}$, on a aussi $F = \{0\}$.
Supposons $F \ne \{0\}$, soit $\mathscr{L}$ une partie libre de F, donc c'est une partie libre de E et a donc au plus n éléments ; $\mathscr{L}$ a au moins un élément non nul car $F \ne \{0\}$, il y a donc dans F des parties libres, soit p le nombre d'éléments d'une partie libre maximale de F, donc c'est une base de F et $1 \le p \le n$.
Si $n = p$ alors la dernière famille serait une base de E et $F = E$. □

Proposition 2.6 **Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie admet au moins un supplémentaire G par rapport à E et :**

$$E = F \oplus G \Longrightarrow \dim E = \dim F + \dim G.$$

Démonstration : Soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de E et $\{e_1, e_2, ..., e_p\}$ une base de F, donc d'après le théorème de la base incomplète, on peut construire une base de E de la forme :

$$\{e_1, e_2, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n\}$$

avec $n = \dim E$. Vérifions que $G = \text{vect}\{e_{p+1}, ..., e_n\}$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F.
Soit $x \in E$, il existe des scalaires tels que

$$x = \sum_{i=0}^{n} \mu_i e_i$$

Si l'on pose $y = \sum_{i=0}^{p} \mu_i e_i$ et $z = \sum_{i=p+1}^{n} \mu_i e_i$, alors $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.
Si $x \in F \cap G$, il existe $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$, $\mu_{p+1}, ..., \mu_n$ tels que

$$x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i e_i = \sum_{i=p+1}^{n} \mu_i e_i$$

On a donc

$$\sum_{i=0}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{i=p+1}^{n} (-\mu_i) e_i = 0$$

donc $\lambda_i = \mu_j = 0$, et par conséquent $x = 0$ et donc $F \cap G = \{0\}$. □

3 Rang d'une application linéaire

3.1 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 3.1 *Soit $\mathscr{F} = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. On appelle rang de $\mathscr{F}$ l'entier $rg\mathscr{F} = \dim \text{Vect}(\mathscr{F})$. C'est le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire de la famille $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$*

Proposition 3.1 **Étant donné p vecteurs $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} a_i$ d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$ $(p \leq n)$, si**

$$(j < i \Longrightarrow x_{ij} = 0) \text{ et } (\forall 1 \leq i \leq p)\ x_{ii} \neq 0$$

les p vecteurs (x_i) sont indépendants.

Démonstration : Soit

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_p x_p = 0$$

en considérant les composantes de $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_p x_p$ nous avons pour tout $j = 1, 2, ..., p$

$$\lambda_1 x_{1j} + \lambda_2 x_{2j} + ... + \lambda_p x_{pj} = 0$$

soit donc

$$\begin{array}{l} \lambda_1 x_{11} = 0 \\ \lambda_1 x_{12} + \lambda_2 x_{22} = 0 \\ . \\ . \\ \lambda_1 x_{1j} + \lambda_2 x_{2j} + ... + \lambda_j x_{jj} = 0 \\ . \\ . \\ \lambda_1 x_{1p} + \lambda_2 x_{2p} + ... + \lambda_p x_{pp} = 0 \end{array}$$

ce qui donne $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_p = 0$. □

Proposition 3.2 *(Propriétés)* **Le rang d'une famille de vecteurs reste inchangé dans les cas suivantes :**

1. **si on permute les vecteurs de la famille.**
2. **si on multiplie un vecteur par un scalaire non nul.**
3. **si on ajoute à un vecteur une combinaisons linéaire des autres vecteurs.**

Démonstration : Soit $\mathscr{F} = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.

1. C'est évident
2. Le sous-espace engendré par $\mathscr{F}$ et par $\mathscr{F}' = \{v_1, v_2, ..., \lambda_i v_i, ..., v_p\}$ est bien le même si $\lambda_i \neq 0$.
3. De même le sous-espace engendré par $\mathscr{F}$ et par $\mathscr{F}'' = \{v_1, v_2, ..., v_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{p} \mu_j v_j, ..., v_p\}$ est le même .

□

Exemple : Dans $\mathbb{R}^4$ on donne

$$\vec{a} = (1,2,3,4);\quad \vec{b} = (3,4,5,7);\quad \vec{c} = (3,2,1,2)$$

Déterminons le rang de $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$

$$\begin{array}{ccc} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3\\4\\5\\7\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3\\2\\1\\2\end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} \vec{a} & \vec{b}-3\vec{a} & \vec{c}-3\vec{a} \\ \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\-2\\-4\\-5\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\-4\\-8\\-10\end{pmatrix} \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc} \vec{a} & \vec{b}-3\vec{a} & \vec{c}-2\vec{b}+3\vec{a} \\ \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\-2\\-4\\-5\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \end{array}$$

Donc $rg(\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}) = rg(\{\vec{a}, \vec{b} - 3\vec{a}, 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}\}) = 2$ et la famille est liée par la relation $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = 0$. On déduit aussi que $\dim \mathrm{Vect}\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} = 2$ et que $\{\vec{a}, \vec{b} - 3\vec{a}\}$ est une base de $\mathrm{Vect}\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

3.2 Théorème du rang

Définition 3.2 *Soient E et F deux sous-espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et f une application linéaire de E dans F. On appelle rang de f, que l'on note $\mathrm{rg}(u)$, la dimension de $\mathrm{Im} f$ lorsqu'elle est finie.*

Lemme 3.1 *Soient E et F deux sous-espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et f une application linéaire de E dans F. Si E_0 est un supplémentaire de $\ker f$ dans E, l'application u induit un isomorphisme de E_0 sur $\mathrm{Im} f$.*

Démonstration : L'application g :

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \longrightarrow & \mathrm{Im} f \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est bien définie et linéaire ; montrons qu'elle bijective.

1. $\ker f = \{x \in E_0 \backslash f(x) = 0\} = E_0 \cap \ker f = \{0\}$, donc g est injective.
2. Soit $y \in \mathrm{Im} f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et puisque E_0 et $\ker f$ sont supplémentaires de E, on peut écrire :

   $$x = x_0 + x_1 \text{ avec } x_0 \in E_0 \text{ et } x_1 \in \ker f$$

   Par suite

   $$y = f(x) = f(x_0) = g(x_0)$$

   et par conséquent g est surjective.

□

Théorème 3.1 **Si E est de dimension finie et f une application linéaire de E dans une espace vectoriel F, alors**

$$\dim E = \mathrm{rg} f + \dim(\ker f).$$

Démonstration : Soit E_0 un supplémentaire de $\ker f$ dans E. D'après ce qui précède, les sous-espaces vectoriels E_0 et $\operatorname{Im} f$ sont isomorphe et ont donc la même dimension finie. Par conséquent :

$$\dim E = \dim E_0 + \dim \ker f = \dim \operatorname{Im} f + \dim(\ker f).$$

□

Remarque : Bien que $\dim E = \dim \operatorname{Im} f + \dim(\ker f)$, $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ ne sont pas supplémentaires dans E. En effet, d'abord, $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F et non de E et même si $F = E$, $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ peuvent ne pas être supplémentaires dans E, comme le montre l'exemple suivant :

$$f \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (0,x) \end{array}$$

dans le quel on a :

$$\ker f = \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{(0,1)\}.$$

Corollaire 3.1 **Étant donné deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de E de dimension finie, alors**

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2).$$

Démonstration : Considérons l'application f de $E_1 \times E_2$ dans E définie par

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$(x_1 \in E_1, x_2 \in E_2)$

1. f est une application linéaire.
2. $\ker f$ est décrit par $(x, -x)$, x décrivant $E_1 \cap E_2$, de plus l'application
$$x \longmapsto (x, -x)$$
de $E_1 \cap E_2$ dans $\ker f$ est un isomorphisme, donc $\ker f$ est isomorphe à $E_1 \cap E_2$.
3. On a : $\operatorname{Im} f = E_1 + E_2$ et d'après le théorème de rang :
$$\dim(E_1 \times E_2) = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f$$
ou encore
$$\dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$$

□

Corollaire 3.2 **Soit f une application linéaire de E dans F, E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies sur $\mathbb{K}$. respectivement égales à n et p.**

1. $\operatorname{rg} f = n$ **si, et seulement si, f est injective.**
2. $\operatorname{rg} f = p$ **si, et seulement si, f est surjective.**

Démonstration :

1. En effet $\operatorname{rg} f = n - \dim \ker f = n$ implique $\ker f = \{0\}$ donc f injective et réciproquement.
2. $\dim f(E) = \dim F$ équivalent à f est surjective.

□

On en déduit le résultat fondamental suivant :

Corollaire 3.3 **E et F étant deux espaces vectoriels de même dimensions. Pour toute application linéaire f de E dans F les propriétés suivantes sont équivalentes :**

1. **f est une bijective.**
2. **f est injective.**
3. **f est surjective.**

4 Formes linéaires en dimension finie

4.1 Espace vectoriel dual, base duale

Définition 4.1 *On appelle dual d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, l'ensemble des formes linéaires sur E, c'est-à-dire l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$. On le note E^*.*

Remarque : Si E est de dimension finie, il est de même de $E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ et $\dim E = \dim E^*$, donc E et E^* sont deux espaces vectoriels isomorphes.

Théorème et définition 4.1 **E étant un un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, on note e_i^* la forme linéaire définie sur E par :**

$$\forall 1 \le j \le n, \quad e_i^*(e_j) = \delta_{ij}. \text{ (symbole de Kronecker)}$$

Alors la famille $(e_i^*)_{1\le i\le n}$ est une base de E^*, appelée base duale de $\mathscr{B}$.

Démonstration : Puisque $\dim E^* = n$, il suffit de montrer que la famille $(e_i^*)_{1\le i\le n}$ est une famille libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* = 0$, alors :

$$\forall 1 \le j \le n, \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*(e_j) = \lambda_j = 0.$$

□

Remarques :

1. Si x est un vecteur de E dont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ sont $(x_1, x_2, ..., x_n)$, alors :
$$\forall 1 \le i \le n, \quad e_i^*(x) = e_i^*(x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n) = x_i$$
2. Toute forme linéaire f s'écrit sous la forme
$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*$$
Si $x \in E$ dont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ sont $(x_1, x_2, ..., x_n)$, alors :
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$
ce qui donne l'expression générale d'une forme linéaire sur E.

4.2 Hyperplans et formes linéaires

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \ge 1$.

Proposition 4.1 **Si H est un sous-espace vectoriel de E, les propositions suivantes sont équivalentes :**

1. $\dim H = n - 1$,
2. **il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$,**
3. **il existe une forme linéaire non nulle f telle que $H = \ker f$.**

On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel H de E vérifiant l'un de ces conditions.

Démonstration : 1. $\Longrightarrow$ 2. Si $\dim H = n-1$, alors H admet un supplémentaire D par rapport à E et on a :

$$\dim D = \dim - \dim H = 1$$

ce qui preuve que D est une droite vectorielle de E.
2. $\Longrightarrow$ 3. Soit $\{e_1, e_2, ..., e_{n-1}\}$ une base de H et e_n une base de D, alors $\{e_1, e_2, ..., e_{n-1}, e_n\}$ est une base de E, de plus $x \in H$ si, et seulement si, sa composante sur e_n est nulle, c'est-à-dire $e_n^*(x) = 0$.
Donc $H = \ker e_n^*$.
3. $\Longrightarrow$ 1. Soit $f \in E^*$ telle que $H = \ker f$, alors d'après la formule du rang, on a :

$$\dim H = \dim E - \operatorname{rg} f = n-1$$

car f est non nulle. □

Remarque : Si un sous-espace vectoriel F contient strictement un hyperplan, alors il est égal à E puisque sa dimension est strictement supérieure à $n-1$, donc égale à $\dim E$.

Corollaire 4.1 **Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Une partie H de E est un hyperplan si, et seulement si, elle admet dans la base $\mathscr{B}$ une équation du type :**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

où les a_i sont des scalaires non tous nuls.

Démonstration : Il suffit de remarquer que l'expression générale d'une forme linéaire f dans une base B est $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$. □

Proposition 4.2 **Deux formes linéaires f et g sur E sont colinéaires si, et seulement si, $\ker f = \ker g$.**

Démonstration : L'hyperplan $H = \ker f$ admet un supplémentaire D qui est une droite vectorielle ; notons e_n une base de D.
$e_n \notin \ker f = \ker g$ implique :

$$g(e_n) \neq 0 \text{ et } \lambda = \frac{f(e_n)}{g(e_n)} \neq 0$$

Tout vecteur x de E s'écrit :

$$x = h + \alpha e_n \text{ avec } h \in H \text{ et } \alpha \in \mathbb{K}$$

et on a :

$$g(x) = g(h) + \alpha g(e_n) = \alpha g(e_n)$$

et

$$f(x) = f(h) + \alpha f(e_n) = \alpha f(e_n) = \lambda g(x).$$

Donc $f = \lambda g$. □

Corollaire 4.2 **Deux hyperplans, d'équations respectives :**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 0$$

dans une base de E, sont égaux si, et seulement si, , s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $(b_1, b_2, ..., b_n) = \lambda(a_1, a_2, ..., a_n)$.

••••••••••