Chapitre 13
COURBES PLANES PARAMÉTRÉES

Mohamed TARQI

Table des matières

1 Notions sur les fonctions vectorielles **1**
1.1 Définitions et propriétés 1
1.2 Paramétrage admissible 2

2 Étude locale d'une courbe paramétrée **2**
2.1 Points multiples 2
2.2 Tangente en un point d'un arc paramétré 3
2.3 Points remarquables 4

3 Branches infinies **6**

4 Tracé des courbes paramétrées **7**
4.1 Réduction du domaine 7
4.2 Plan d'étude d'un arc paramétré 7
4.3 Exemples 8

5 Courbes en polaires **10**
5.1 Définitions et propriétés 10
5.2 Étude d'une courbe en polaires 11
5.2.1 Tangente en un point 11
5.2.2 Points d'inflexions 12
5.3 Étude d'un exemple 13

••••••••••

Nous savons que toute fonction numérique d'une variable réelle est caractérisé par sa courbe représentative dans un repère du plan. Mais la plupart des phénomènes physiques ne sont pas caractérisées par des fonction numériques, mais par des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, dites fonctions vectorielles. Le mouvement d'un mobile M, qui se déplace dans le plan est déterminée par la donnée, à l'instant t, de ses coordonnées.
dans ce chapitre nous allons étudier quelques propriétés de ces fonctions et savoir les représenter graphiquement.
Dans tout le chapitre le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}\ \overrightarrow{j})$.

1 Notions sur les fonctions vectorielles

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1 *On appelle arc par paramétré, ou courbe paramétrée, tout couple (I, f), où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}^2$. L'ensemble $f(I) = \{f(t)/t \in I\}$ est appelée support (ou l'image) de l'arc (I, f).*

Définition 1.2 *Soit* $f: \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & f(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} \end{array}$ *une fonction vectorielle. Les fonctions x et y s'appellent les composantes de f dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.*

Remarque : L'étude du graphe d'une fonction numérique $y = f(x)$ rentre dans ce cadre, il suffit de poser $x(t) = t$ et $y(t) = f(t)$.

Exemples :

1. L'application $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \longmapsto & f(t) = r\cos t\,\vec{i} + r\sin t\,\vec{j} \end{array}$ $(r > 0)$ définit un arc paramétré, dont le support est le cercle de centre O et de rayon r.
2. L'application $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \longmapsto & f(t) = 1 + \dfrac{1}{2}t\,\vec{i} + -2 - t\,\vec{j} \end{array}$ définit la droite passant par le point $(1, -2)$ et dirigée par le vecteur $(\frac{1}{2}, -1)$.
3. L'application $\begin{array}{cccc} f: & [0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \longrightarrow & f(t) = (r\cos 2t, r\sin 2t) \end{array}$ $(r > 0)$ définit un arc paramétré, cet arc a le même support que l'arc de l'exemple 1.

Remarque : Si f représente le mouvement d'un mobile dont la position à l'instant $t \in I$ est le point $M(t) = f(t)$.
• Le support de l'arc (I, f) est appelé trajectoire du mouvement.
• Les vecteurs $f'(t)$ et $f''(t)$ (lorsqu'ils existent) sont appelés respectivement vitesse et accélération du point $M(t)$ à l'instant t.

Définition 1.3 *On dit que l'arc (I, f) est de classe $\mathscr{C}^k$ si f est de classe $\mathscr{C}^k$.*

1.2 Paramétrage admissible

Définition 1.4 *Soit (I, f) un arc paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$. Un paramétrage (J, φ) de classe $\mathscr{C}^k$ est un paramétrage admissible (ou reparamétrage) de (I, f) s'il existe une fonction g de I dans J de classe C^k ainsi que sa réciproque, telle que $f = \varphi \circ g$. Une telle application g est appelée changement de paramétrage de classe $\mathscr{C}^k$.*

Exemples : L'arc paramétrée défini pour $t \in]-\pi, \pi[$ par $(x(t) = \cos t, y(t) = \sin t)$ admet comme paramétrage admissible l'arc $(x(u) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}, y(u) = \dfrac{2u}{1+u^2})$ avec $u \in \mathbb{R}$, le changement de paramétrage est l'application :

$$\begin{array}{cccc} f: &]-\pi, \pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \tan\dfrac{t}{2} \end{array}.$$

2 Étude locale d'une courbe paramétrée

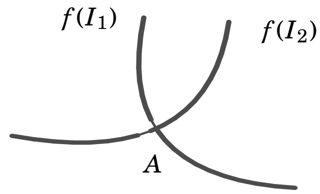
2.1 Points multiples

Définition 2.1 *On dit que A est un point multiple de la courbe (I, f) s'il existe au moins deux paramètres t_1 et t_2 distincts tels que $A = f(t_1) = f(t_2)$.*

Pour trouver les points multiples, il faut résoudre le système

$$\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \\ t_1 \neq t_2 \end{cases}.$$

Soit (t_1, t_2) une telle solution et soit $A = f(t_1) = f(t_2)$, deux cas se présentent :



1. Il existe deux voisinages I_1 et I_2 de t_1 et t_2 respectivement tels que : $\{A\} = f(I_1) \cap f(I_2)$. Le point A est alors dit un point double.

2. Il existe deux voisinages I_1 et I_2 de t_1 et t_2 respectivement tels que : $f(I_1) \cap f(I_2)$, c'est-à-dire la courbe décrit deux fois un voisinage de A . C'est un cas sans importance.

Exemple : Soit à étudier les points multiples de la courbe Γ définie par ses équations $x(t) = \dfrac{2t-1}{t^2-1}$, $y(t) = \dfrac{t^2}{t-1}$.
Résolvons le système :

$$(S) \qquad \begin{cases} \dfrac{2t_1-1}{t_1^2-1} = \dfrac{2t_2-1}{t_2^2-1} \\ \dfrac{t_1^2}{t_1-1} = \dfrac{t_2^2}{t_2-1} \\ t_1 \neq t_2 \end{cases} .$$

$$(S) \iff \begin{cases} (t_2^2-1)(2t_1-1) = (t_1^2-1)(2t_2-1) \\ (t_2-1)(t_1^2) = (t_1-1)(t_2^2) \\ t_1 \neq t_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2t_1t_2(t_2-t_1) + (t_1^2-t_2^2) = 2(t_1-t_2) \\ t_1t_2(t_1-t_2) + (t_2^2-t_1^2) = 0 \\ t_1 \neq t_2 \end{cases}$$

Comme $t_1 \neq t_2$, on obtient après simplification :

$$\begin{cases} 2t_1t_2 - (t_1+t_2) + 2 \\ t_1t_2 - (t_2+t_1) = 0 \\ t_1 \neq t_2 \end{cases}$$

Alors si on pose : $P = t_1t_2$ et $S = t_1 + t_2$, on obtient : $P = S = -2$. On sait que t_1 et t_2 sont solution de l'équation : $X^2 - SX + P = 0$, cela donne : $t_1 = -1 + \sqrt{3}$ et $t_2 = -1 + \sqrt{3}$ et $x(t_1) = -1$ et $y(t_1) = -2$. $A = (-1,-2)$ est alors le point double de la courbe Γ.

2.2 Tangente en un point d'un arc paramétré

Soit $\Gamma = (I, f)$ une courbe paramétrée, supposons que les composantes de f admettent un développement de Taylor à l'ordre n, au voisinage d'un point $t_0 \in I$. Donc on a :

$$f(t) = f(t_0) + \frac{(t-t_0)}{1!} f'(t_0) + \ldots + \frac{(t-t_0)^n}{n!} f^n(t_0) + (t-t_0)^n \varepsilon(t)$$

où $\varepsilon(t) = (\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t))$ est une fonction vectorielle qui tend vers $(0,0)$ quand t tend vers t_0.

Définition 2.2 *Soit (I, f) un arc paramétrée et $t_0 \in I$, si f est dérivable et t_0 et $f'(t_0) \neq 0$, on dit que $A = f(t_0)$ est un point régulier. On dit que $A = f(t_0)$ est stationnaire si $f'(t) = 0$.*

Exemple : Pour l'arc paramétrée défini sur $[0, 4\pi]$ par :

$$f(t) = \left(\cos t - 2\cos\frac{t}{2}, \sin t - 2\sin\frac{t}{2} \right),$$

on a :

$$f'(t) = 0 \iff t \equiv \frac{t}{2} [2\pi].$$

Donc les points stationnaires sont les points de paramètres 0 et 4π, les autres sont réguliers.

Proposition 2.1 **Supposons qu'il existe un entier p tel que :**

$$f'(t_0) = f''(t_0) = ... = f^{(p-1)}(t_0) = 0 \text{ et } f^{(p)}(t_0) \neq 0.$$

Alors la courbe (I, f) admet pour tangente, au point $A = f(t_0)$, la droite d'équation :

$$(y - y(t_0))x^{(p)}(t_0) = (x - x(t_0))y^{(p)}(t_0).$$

qui passe par A et qui est parallèle à $f^{(p)}(t_0)$.

Démonstration : Avec ces conditions, la formule de Taylor à l'ordre p s'écrit :

$$f(t) - f(t_0) = \frac{(t-t_0)^p}{p!} f^{(p)}(t_0) + (t-t_0)^p \varepsilon(t).$$

Donc la droite D_t, passant par $f(t)$ et $f(t_0)$ est parallèle à la droite de pente $\frac{1}{p!} f^{(p)}(t_0) + \varepsilon(t)$. Lorsque t tend vers t_0, D_t admet pour limite la droite passant par $f(t_0)$ de pente $f^{(p)}(t_0) = (x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0))$. □

Remarques :

1. Si $x^{(p)}(t_0) = 0$ et $y^{(p)}(t_0) \neq 0$, on a une tangente verticale.
2. Si $x^{(p)}(t_0) \neq 0$ et $y^{(p)}(t_0) = 0$, on a une tangente horizontale.
3. Dans tous les cas, la tangente à la courbe (I, f) est la droite passant par $A = f(t_0)$, ayant pour pente $m = \frac{y^{(p)}(t_0)}{x^{(p)}(t_0)}$. qui représente la tangente de l'angle qui fait la droite tangente avec l'axe des abscisses.

2.3 Points remarquables

On conserve les mêmes hypothèses que le paragraphe ci-dessus. Supposons en plus, qu'il existe un entier $q > p$ tel que les deux vecteurs $f^{(p)}(t_0)$ et $f^{(p)}(t_0)$ forme une base de $\mathbb{R}^2$, donc d'après ce choix de p et de q, on a :

$$\forall k \in \{p+1, ..., q-1\}, \ \exists \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ tel que } f^{(k)}(t_0) = \lambda_k f^{(p)}(t_0)$$

Maintenant la formule de Taylor s'écrit :

$$f(t) - f(t_0) = \frac{(t-t_0)^p}{p!} f^{(p)}(t_0) + ... + \frac{(t-t_0)^{q-1}}{(q-1)!} f^{(q-1)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{q!} f^{(q)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q!} \varepsilon(t).$$

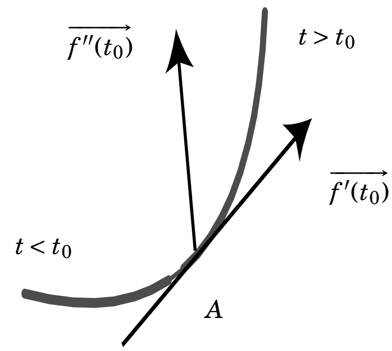
Donc en écrivant $\varepsilon(t) = (\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t))$ dans la nouvelle base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = (f^{(p)}(t_0), f^{(p)}(t_0))$, on obtient :

$$f(t) - f(t_0) = \left[\frac{(t-t_0)^p}{p!} + \frac{(t-t_0)^{p+1}}{(p+1)!}\lambda_{p+1} + ... + \frac{(t-t_0)^{q-1}}{(q-1)!}\lambda_{q-1} + \frac{(t-t_0)^q}{q!}\varepsilon_1(t)\right]\vec{e_1} + \left[\frac{(t-t_0)^p}{q!} + \varepsilon_2(t)\right]\vec{e_2} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2}.$$

où $a = \dfrac{(t-t_0)^p}{p!}[1 + \widetilde{\varepsilon}_1(t)]$ avec $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \widetilde{\varepsilon}_1(t) = 0$ et $b = \dfrac{(t-t_0)^q}{q!}[1 + \widetilde{\varepsilon}_2(t)]$ avec $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \widetilde{\varepsilon}_2(t) = 0$.
Si l'on pose $A_0 = f(t_0)$, le vecteur $\overrightarrow{A_0 M}$ a donc pour composantes (a, b) dans la nouvelle base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$. Pour t suffisamment voisin de t_0, le signe de a est celui de $(t-t_0)^p$ et le signe de b est celui de $(t-t_0)$. Ceci dépend aussi, évidement du signe de $(t-t_0)$ et de la parité de p et de q.
Plusieurs cas se présentent :
Premier cas : p impair et q pair. (En pratique $p = 1$ et $q = 2$).
Dans ce cas $f'(t_0) \neq 0$ et $f''(t_0)$ non colinéaire avec $f'(t_0)$. Alors :

$$\begin{cases} a > 0 & \text{si } t > t_0, \\ a > 0 & \text{si } t < t_0, \\ b > 0 & \forall t. \end{cases}$$

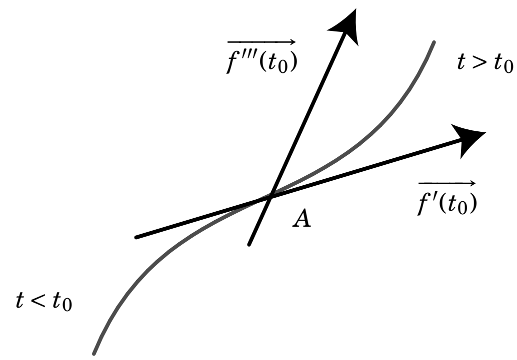
Le point A_0 s'appelle un point de concavité.



Deuxième cas : p impair et q impair. (En pratique $p = 1$ et $q = 3$).
Dans ce cas $f'(t_0) \neq 0$ et $f''(t_0) = \lambda f'(t_0)$ et $f'''(t_0)$ non colinéaire avec $f'(t_0)$. Alors :

$$\begin{cases} a > 0, \; b > 0 & \text{si } t > t_0, \\ a < 0, \; b < 0 & \text{si } t < t_0. \end{cases}$$

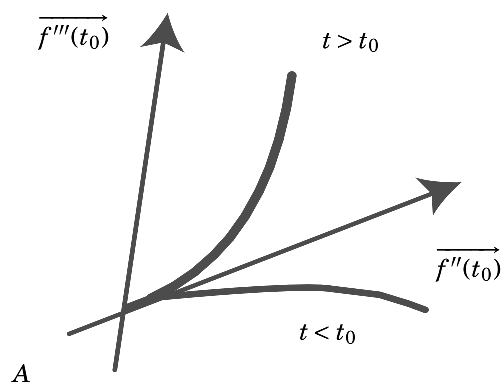
Le point A_0 s'appelle un point d'inflexion.



Troisième cas : p pair et q impair. (En pratique $p = 2$ et $q = 3$).
Dans ce cas $f'(t_0) = 0$ et $f''(t_0) \neq 0$ et $f'''(t_0)$ non colinéaire avec $f''(t_0)$. Alors :

$$\begin{cases} a > 0 & \forall t, \\ b > 0 & \text{si } t > t_0, \\ b < 0 & \text{si } t < t_0. \end{cases}$$

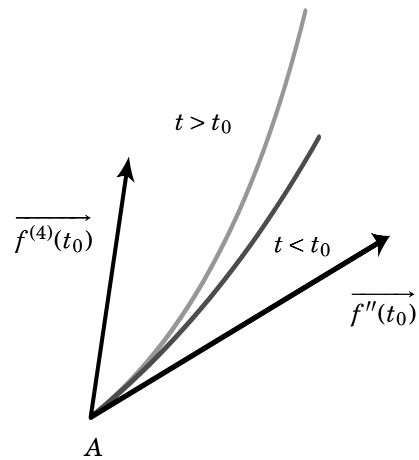
Le point A_0 s'appelle un point de rebroussement de première espèce.



Quatrième cas : p pair et q pair. (En pratique $p = 2$ et $q = 4$).
Dans ce cas $f'(t_0) = 0$ et $f''(t_0) \neq 0$ et $f'''(t_0) = \lambda f''(t_0)$ et $f^{(4)(t_0)}$ non colinéaire avec $f''(t_0)$. Alors :

$$\begin{cases} a > 0 & \forall t, \\ b > 0 & \forall t. \end{cases}$$

Le point A_0 s'appelle un point de rebroussement de seconde espèce.



Exemple : Soit Γ la courbe définie par : $f(t) = (t^2 - t, t^3 - 1)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = (2t - 1, 3t^2).$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) \neq 0$, d'autre part f est deux fois dérivable et $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f''(t) = (2, 6t)$, donc :

$$\det(f'(t), f''(t) = 0 \Longleftrightarrow t = 0 \text{ ou } t = 1.$$

- Pour $t \neq 0$ et $t \neq 1$, le point $A = f(t)$ est un point de concavité.
- Nature de $A_0 = f(0)$ et $A_1 = f(1)$: On a $f'''(t) = (0, 6)$, donc $(f'(0), f'''(0))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et par conséquent le point A_0 est un point d'inflexion. De même $(f'(1), f''(1)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et par conséquent, le point A_1 est un point d'inflexion.

3 Branches infinies

Dans cette section $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique dont la norme est notée $\| \, . \, \|$.
• (I, f) est un arc paramétrée, avec $f(t) = (x(t), y(t))$.
• $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ est une extrémité de I n'appartient pas à I.

Définition 3.1 *L'arc (I, f) admet une branche infini en t_0 si* $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \|f(t)\| = \pm\infty$.

Dans l'étude des branches infinies, trois cas se présentent :

1. Si $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$. Alors la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote verticale de (I, f).
2. Si $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} y(t) = y_0 \in \mathbb{R}$. Alors la droite d'équation $y = y_0$ est asymptote horizontale de (I, f).
3. Si $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$. Alors il faut poursuivre l'étude et chercher (comme pour les fonctions numériques $y = f(x)$) la limite du rapport $\frac{y(t)}{x(t)}$ quand t tend vers t_0. Plusieurs cas se présentent :
   - $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = +\infty$ (resp. $-\infty$). Dans ce cas on a une branche parabolique dirigée vers les y positifs (resp. négatifs).
   - $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} (y(t) - ax(t) = \pm\infty$. Dans ce cas on a une droite asymptotique d'axe la droite d'équation $y = ax$.
   - $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} (y(t) - ax(t) = b \in \mathbb{R}$. Dans ce cas la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe (I, f) quand t tend vers t_0.

Remarque : pour connaître la position de l'arc par rapport à l'asymptote, il suffit d'étudier le signe de $[y(t) - ax(t) - b]$ quant t tend vers t_0, en faisant, par exemple, un développement limité de cette différence au voisinage de t_0.

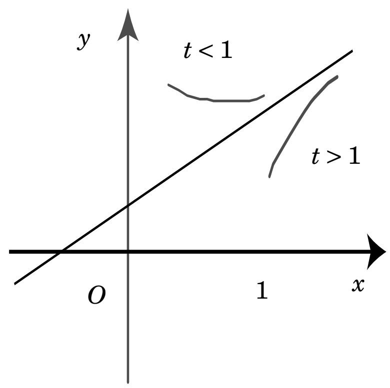
Proposition 3.1 **L'arc (I, f) admet la droite D d'équation $ax + by + c = 0$ comme asymptote en t_0 si, et seulement si, on a :**

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} [ax(t) + by(t) + c] = 0.$$

Démonstration : La droite $D : ax+by+c=0$ est asymptote à l'arc (I,f) en t_0 si, et seulement si, $\lim\limits_{t\longrightarrow t_0} d(D,f(t))=0$ c'est-à-dire $\lim\limits_{t\longrightarrow t_0} \dfrac{|ax(t)+by(t)+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$ ou encore $\lim\limits_{t\longrightarrow t_0}[ax(t)+by(t)+c]=0$. □

Exemple : Étude de branche infinie en $t=1$ de l'arc défini par $f(t)=\left(\frac{t}{t^4-1},\frac{t^2}{t^4-1}\right)$.
On a :
- $\lim\limits_{t\longrightarrow 1}|x(t)|=\lim\limits_{t\longrightarrow 1}|y(t)|=\pm\infty$.
- $\lim\limits_{t\longrightarrow 1}\frac{y(t)}{x(t)}=1$.
- $y(t)-x(t)=\frac{t}{(t+1)(t^2+1)}$ et donc $\lim\limits_{t\longrightarrow 1}(y(t)-x(t))=\frac{1}{4}$, et par conséquent, la droite d'équation $y=x+\frac{1}{4}$ est asymptote à l'arc en $t=1$.

$y(t)-x(t)-\dfrac{1}{4}=\dfrac{t}{(t+1)(t^2+1)}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{-1}{4}(t-1)\dfrac{t^2+2t-1}{(t+1)(t^2+1)}$. Comme $\dfrac{t^2+2t-1}{(t+1)(t^2+1)}$ est positif au voisinage de $t=1$, on en déduit que l'arc, au voisinage de $t=1$, est en dessous de l'asymptote pour $t>1$ et au dessus pour $t<1$.



4 Tracé des courbes paramétrées

4.1 Réduction du domaine

Commençons d'abord par réduire le domaine de définition, on a :

$$D_f=D_x\cap D_y.$$

Dans le cas où les fonctions x et y sont périodiques et admettent un même période T, on réduit le domaine d'étude à un intervalle de longueur T.
Si les fonctions x et y sont toutes deux impaires, la courbe est symétrique par rapport à l'origine O. En effet, le changement de t en $-t$ transforme x en $-x$ et y en $-y$, dont transforme le point $M(x,y)$ en son symétrique $M(-x,-y)$ par rapport à O. Donc réduction du domaine d'étude à $[0,+\infty[$ où à $[0,\frac{T}{2}]$ en cas d'une période T.
Le tableau suivant résume tous les cas possibles.

	x paire	x impaire
y paire	La courbe est parcourue deux fois si t varie de $-\infty$ à $+\infty$, l'étude sur $[0,+\infty[$ donne la courbe tout entière.	La courbe est symétrique par rapport à l'axe (Oy).
y impaire	La courbe est symétrique par rapport à l'axe (Ox).	La courbe est symétrique par rapport à l'origine O.

4.2 Plan d'étude d'un arc paramétré

1. Recherche du domaine de définition.

2. Réduction du domaine.
3. Étude des branches infinies.
4. Étude du sens de variation des composantes de f et dresser un tableau de variation des fonctions x et y.
5. Étude des points remarquables : points doubles, points d'inflexion, points de rebroussements, points d'intersection avec les axes.

4.3 Exemples

EXEMPLE 1 Considérons la courbe paramétrée définie par : $f(t) = \left(x(t) = t^2 - 2t, y(t) = t^2 - \dfrac{1}{t^2}\right)$.

1. $D_f = D_x \cap D_y =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
2. $x(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} y(t) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe.

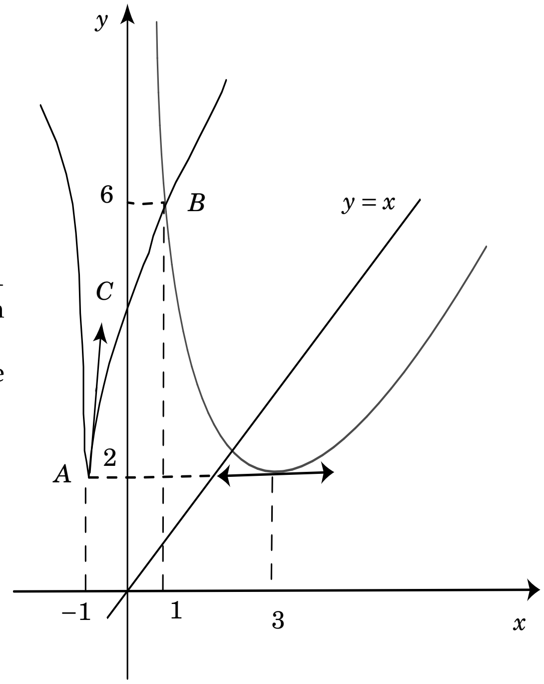
   D'autre part, $\lim\limits_{t \longrightarrow \pm\infty} x(t) = +\infty = \lim\limits_{t \longrightarrow \pm\infty} x(t)$. $\lim\limits_{t \longrightarrow \pm\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 1$ et $\lim\limits_{t \longrightarrow \pm\infty} [y(t) - x(t)] = \infty$ Donc la courbe admet une direction asymptotique d'axe la droite $y = x$ au voisinage de $\pm\infty$.
3. Étude des points remarquables : Le point $A = f(1) = (-1, 2)$ est un point stationnaire.Le point $A = f(1) = (-1, 2)$ est un point stationnaire, calculons les dérivées d'ordre 2 et 3. On trouve : $f''(1) = (2, 8)$, $f'''(1) = (0, -24)$. Le système $(f''(1), f'''(1))$ est libre, le point A est alors un point de rebroussement de première espèce.
4. Points doubles :
   Résolvons le système :

$$(S) \qquad \begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t^2) \\ t_1 \neq t_2 \end{cases}$$

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} (t_1 - t_2)(t_1 + t_2) = 2(t_1 - t_2) \\ (t_1^2 - t_2^2) = \dfrac{(t_1^2 - t_2^2)}{t_1^2 t_2^2} \\ t_1 \neq t_2 \end{cases}$$

   Alors si on pose : $S = t_1 + t_2 = 2$ et $P^2 = (t_1 t_2)^2 = 1$, on est amené à chercher $t_2 \neq t_2$ tels que $[S = 2, P = 1]$ et $[S = 2,\ P = -1]$. Le premier cas n'admet pas de solutions différentes, le second admet pour solution $t_1 = 1 + \sqrt{2}$ et $t_2 = 1 + \sqrt{2}$ et par conséquent, le point $B = f(t_1) = f(t_2) = (1, 6)$ est un point double.
5. Sens de variation : on a : $\forall t \in D_f,\ \ x'(t) = 2(t-1),\ \ y'(t) = \dfrac{2(t-1)(t+1)(t^2+1)}{t^3}$. On obtient le tableau de variation suivant :

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$				$-$			0	$+$	
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

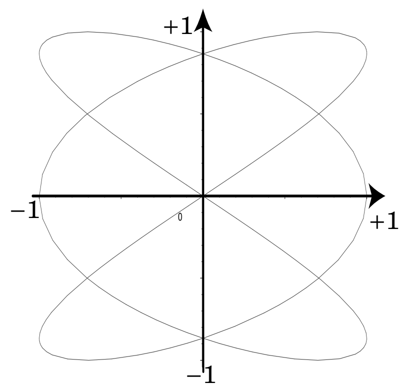


Intersection avec les axes : L'équation $x(t) = 0$, donne $t = 1$ ou $t = 2$, comme $0 \notin D_f$, il n'y a qu'un point d'intersection avec (Oy), c'est le point $C = f(2) = (1, \frac{17}{4})$.
L'équation $y(t) = 0$ n'a pas de solution, donc le courbe ne coupe pas (Ox).

Remarque : Comment tracer une courbe paramétrée ? on commence la construction à partir d'un point remarquable, par exemple le point $A = (-1, 2) = f(1)$. A droite de A, on voit que x croit et y croit. Donc la portion de la courbe correspondante se trouve dans le premier quart du plan $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On sait qu'elle admet une direction asymptotique d'axe $y = x$. De la façon on construit la portion de la courbe à gauche de A. On refait la même chose pour les autres intervalles. Ce qui donne la courbe représenté sur la figure.

EXEMPLE 2 Soit à construire la courbe définie par : $(x(t) = \cos 3t, y(t) = \sin 2t)$.
$D_E = [0, \frac{\pi}{2}]$, en effet :
- Les fonction x et y sont définies sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques, donc la courbe est obtenu entièrement lorsque t décrit l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
- Les relations $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ montrent que la courbe est symétrique par rapport à (Ox) et qu'on peut se limiter le tracé à $t \in [0, \pi]$.
- Les relations $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$ montrent que la courbe est symétrique par rapport à (Oy) et qu'on peut se limiter le tracé à $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

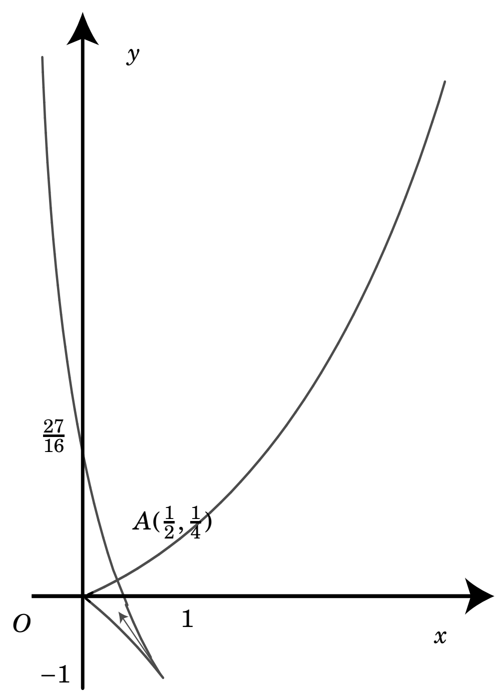
t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0			$-$			0	$+$	
$x(t)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0
$y'(t)$			$+$		0		$-$		



Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $x'(t) = -3\sin 3t$ et $y'(t) = 2\cos 2t$ ce qui donne le tableau de variation et le tracé de la courbe. La courbe ne présente pas don de points stationnaires.

EXEMPLE 3

Considérons la courbe définie par $x(t) = 2t^3 + 3t^2$ et $y(t) = 3t^4 + 4t^3$.
On a $\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = 6t(t+1), y'(t) = 12t^2(t+1)$. La pente de la tangente au point de paramètre t est donc $2t$. La courbe possède un point double $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ donné par les valeurs $t_1 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ et $t_2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$. On peut vérifier aussi que la courbe admet une direction asymptotique qui est celle de l'axe (Oy). La courbe l'axe des x en $(\frac{16}{27}, O)$ pour $t = \frac{-4}{3}$ et coupe l'axe des y en $(0, \frac{27}{16})$ pour $t = \frac{-3}{2}$. La courbe ne présente pas de point d'inflexion. En effet $x'y'' - y'y'' = 72t^2(t+1)^2$: cette expression ne s'annule que pour les valeurs de t qui fournissent les points d'inflexion.



5 Courbes en polaires

5.1 Définitions et propriétés

Soit $\Gamma = (I, f)$ la courbe définie par le paramétrage $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ à l'aide de ses fonctions composantes

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}.$$

Définition 5.1 *la relation $r = \rho(\theta)$ s'appelle l'équation polaire de la courbe Γ.*

Exemples : DROITE PASSANT PAR L'ORIGINE : Une droite passant par l'origine, en polaire, est définie par l'angle constant qu'elle fait avec l'axe (Ox) :

$$D : \theta = \theta_0, \ \ \theta_0 = (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{v}})$$

où $D = O + \mathbb{R}\overrightarrow{i}$.
DROITE NE PASSANT PAS PAR L'ORIGINE : Si on note $\overrightarrow{n} = \cos\theta_0 \overrightarrow{i} + \sin\theta_0 \overrightarrow{j}$ le vecteur normal à la droite D, son équation cartésienne s'écrit :

$$D : (\cos\theta_0)x + (\sin\theta_0)y = a, \ \ a \in \mathbb{R}$$

donc pour tout point $M(r,\theta)$ de D, on a :

$$a = (\cos\theta_0) r\cos\theta + (\sin\theta_0) r\sin\theta = r\cos(\theta-\theta_0)$$

et par conséquent l'équation polaire de d est :

$$D : r = \frac{a}{\cos(\theta-\theta_0)}$$

avec $\frac{-\pi}{2} < \theta-\theta_0 < \frac{\pi}{2}$.

<u>CERCLE DE CENTRE L'ORIGINE :</u> Un cercle $C(O,R)$ de centre l'origine, en polaire, est défini par son rayon R (constant) :

$$C(O,R) : r = R.$$

Remarque : Les courbes en polaires sont en cas particulier des courbes paramétriques, il est donc possible de les étudier avec les méthodes du partie précédente.
Soit u la fonction vectorielle définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$ par :

$$u(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta),$$

on a $u'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$ et plus généralement $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u^{(n)}(\theta) = (\cos(\theta+\frac{n\pi}{2}), \sin(\theta+\frac{n\pi}{2}))$ de sorte que les vecteurs $u^{(n)}(\theta)$ et $u^{(n+1)}(\theta)$ soient orthogonaux.
D'autre part : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \|u^{(n)}(\theta)\| = 1$. De même on déduite de la relation, $f(\theta) = \rho(\theta)u(\theta)$ que, si ρ est dérivable, alors f est dérivable et

$$f'(\theta) = \rho'(\theta)u(\theta) + \rho(\theta)u'(\theta).$$

5.2 Étude d'une courbe en polaires

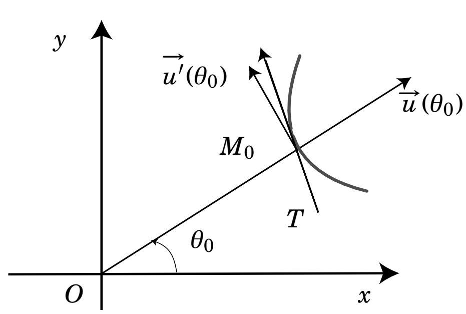
5.2.1 Tangente en un point

Comme pour tout $\theta \in D_\rho$, les deux vecteurs $u(\theta)$ et $u'(\theta)$ sont orthogonaux, on déduit que :

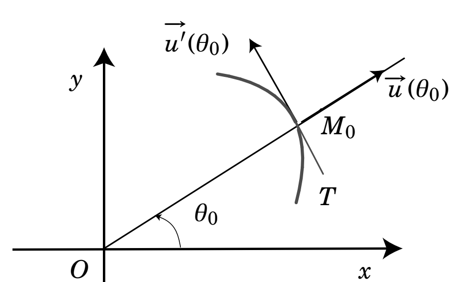
$$f'(\theta) = 0 \Longleftrightarrow \rho'(\theta) = 0 \text{ et } \rho(\theta) = 0.$$

Donc le seul point qui peut être stationnaire est le pôle O. On est alors amené à distinguer deux cas :

1. 1^{er} **cas :** $M_0 \neq O$ et $M_0 \in \Gamma$.
   Posons $M_0 = f(\theta_0)$; on a : $f'(\theta_0) \neq (0,0)$, la tangente à la courbe Γ au point M_0 est dirigée par le vecteur $f'(\theta_0)$.
   Deux cas possibles :



$\rho'(\theta_0) \neq 0$



$\rho'(\theta_0) = 0$

La droite tangente fait un angle α avec le vecteur $u(\theta_0)$, on a : $\tan\alpha = \frac{\rho(\theta_0)}{\rho'(\theta_0)}$.

2. 2^e **cas :** Au pôle O.
Soit $\theta_0 \in D_\rho$ tel que $f(\theta_0) = O$. Supposons qu'il existe $\eta > 0$ tel que $f(\theta) \neq O$ pour tout $\theta \in]\theta_0 - \eta, \theta_0 + \eta[$, supposons de plus ρ de classe $\mathscr{C}_n$, soit p le plus petit entier non nul tel que $\rho^{(p)}(\theta_0) \neq 0$. On a :

$$f^{(n)}(\theta_0) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \rho^{(k)}(\theta_0) u^{(n-k)}(\theta_0).$$

Pour $n = p$, tous les $\rho^{(k)}(\theta_0)$ sont nuls sauf $\rho^{(p)}(\theta_0) \neq 0$, donc

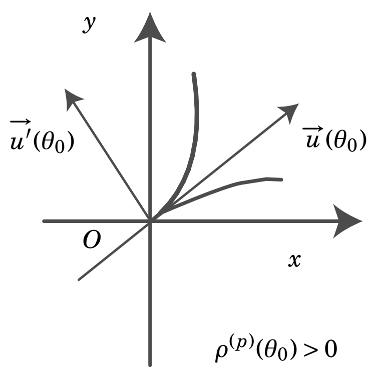
$$\begin{cases} f^{(p)}(\theta_0) = \rho^{(p)}(\theta) u(\theta) \\ f^{(p+1)}(\theta_0) = \rho^{(p+1)}(\theta_0) u_(\theta) + \rho^{(p)}(\theta) u'(\theta) \end{cases}.$$

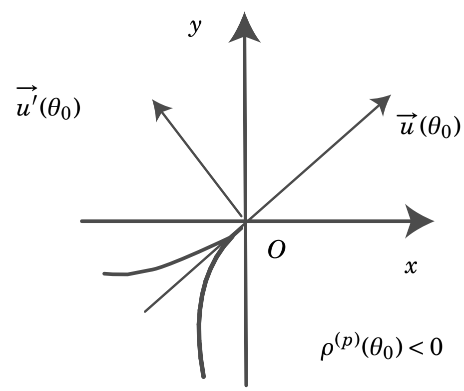
On en déduit que $(f^{(p+1)}(\theta_0), f^{(p)}(\theta_0))$ est une base de $\mathbb{R}^2$, d'où le théorème :

Théorème 5.1 **Soit p le plus petit entier tel que $\rho^{(p)}(\theta_0) \neq 0$ où $f(\theta_0) = 0$, alors :**

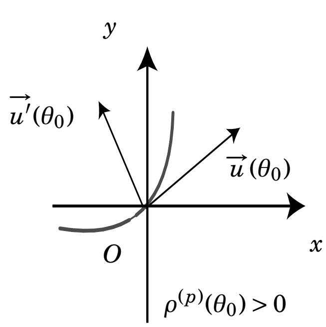
1. **Si p est pair, le pôle O est un point de rebroussement de première espèce.**
2. **Si p est impair, le pôle O est un point de concavité.**

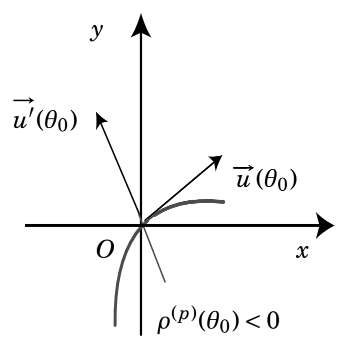
1^{er} **CAS :** si p pair.





2^e **CAS :** si p est impair.





Remarque : L'équation polaire de la droite tangente en $O = f(\theta_0)$ est $[\theta = \theta_0]$, en coordonnées cartésiennes, elle est dirigée par le vecteur $u(\theta_0)$.

5.2.2 Points d'inflexions

Soit M un point de Γ distinct de pôle, donc $M = f(\theta)$ avec $f'(\theta) \neq (0,0)$. M ne peut être jamais un point de rebroussement.

Théorème 5.2 **Soit q le plus petit entier tel que $\{f'(\theta), f^{(q)}(\theta)\}$ est libre. Alors on a :**

1. **Si q est pair, M est un point de concavité.**
2. **Si q est impair, M est un point d'inflexion.**

Remarque : On sait que les points d'inflexions se trouvent parmi les points $M = f(\theta)$ tels que le système $\{f'(\theta), f''(\theta)\}$ soit lié. Comme $f''(\theta) = [\rho''(\theta) - \rho(\theta)]u(\theta) + 2\rho'(\theta)u'(\theta)$, le système $\{f'(\theta), f''(\theta)\}$ soit lié si, et seulement si,

$$\begin{vmatrix} \rho''(\theta) & \rho''(\theta) - \rho(\theta) \\ \rho(\theta) & 2\rho'(\theta) \end{vmatrix} = \rho^2(\theta) + 2\rho'^2(\theta) - \rho(\theta)\rho''(\theta) = 0 \quad (*)$$

Comme $\rho(\theta) \neq 0$, alors si θ_0 est solution de $(*)$, il est solution de l'équation :

$$\frac{\rho^2(\theta) + 2\rho'^2(\theta) - \rho(\theta)\rho''(\theta)}{\rho^3(\theta)} = 0$$

C'es-à-dire θ est solution de l'équation :

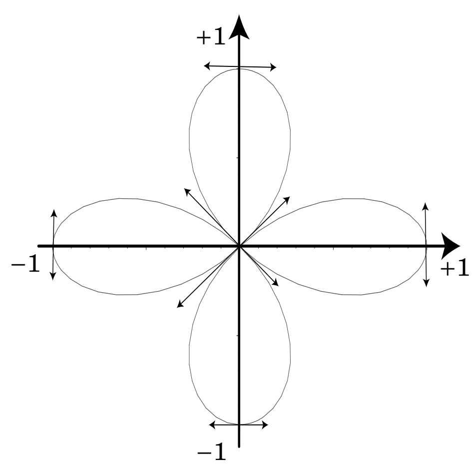
$$\frac{1}{\rho(\theta)} + \left[\frac{1}{\rho(\theta)}\right]'' = 0.$$

5.3 Étude d'un exemple

Soit Γ la courbe définie par son équation polaire $\rho(\theta) = \cos 2\theta$.
$D_\rho = \mathbb{R}$, ρ est périodique de période π, on réduit le domaine d'étude à $[0, \pi]$, et on complète la courbe obtenu par une rotation de centre O et d'angle π. ρ est paire, on restreint l'étude à $[0, \frac{\pi}{2}]$ et on complète par symétrie par rapport à l'axe (Ox).

$$\rho'(\theta) = -2\sin 2\theta.$$

Le pôle est un point de concavité car $\rho(\frac{\pi}{4}) = 0$ et $\rho'(\frac{\pi}{4}) \neq 0$.



θ	0		$\frac{\pi}{4}$		π
$\rho'(\theta)$	0	$-$	-2	$-$	0
$\rho(\theta)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

••••••••••