

# Chapitre 14

## ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Mohamed TARQI

### Table des matières

|          |                                                                                     |          |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>                                                                 | <b>1</b> |
| <b>2</b> | <b>Équations différentielles du premier ordre</b>                                   | <b>2</b> |
| 2.1      | Généralités                                                                         | 2        |
| 2.2      | Exemples                                                                            | 2        |
| <b>3</b> | <b>Équations différentielles linéaires du premier ordre</b>                         | <b>4</b> |
| 3.1      | Solution générale de $(H) : y' + a(x)y = 0$                                         | 4        |
| 3.2      | Solution particulière de $(E) : y' + a(x)y = f(x)$                                  | 4        |
| <b>4</b> | <b>Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants</b> | <b>6</b> |
| 4.1      | Solution générale de $(H) : y'' + ay' + by = 0$                                     | 6        |
| 4.2      | Solution particulière de $(E) : y'' + ay' + by = f(x)$                              | 6        |

•••••

## 1 Introduction

Sous certaines conditions, la chute de température d'un objet est proportionnelle à la différence entre la température de la surface de l'objet et celle du milieu ambiant.

Si  $T(t)$  est la température de l'objet à l'instant  $t$ ,  $S(t)$  la température du milieu qui entoure cet objet, alors cette loi s'exprime, mathématiquement, sous la forme suivante :

$$\frac{dT}{dt} = k(T - S) \quad \text{ou} \quad T' - kT = -kS$$

où  $k$  est la constante de proportionnalité définie par les caractéristiques physiques de l'objet et du milieu.  $S(t)$  est supposée connue. La fonction  $T(t)$  est inconnue.

En général, la solution d'un problème physique passe très souvent par les étapes suivantes :

1) Construction d'un modèle mathématique : A ce niveau on définit les variables et on choisit un système d'unité. Dans l'exemple, l'équation à une seule variable  $t$  : c'est une équation à une dimension.

2) Résolution de l'équation obtenu : En général, il est difficile de trouver la solution exacte d'une telle équation, cependant et dans plusieurs cas on cherche que des solutions approchées. Dans ces conditions une étude théorique qui assure l'existence et l'unicité de la solution est nécessaire.

3) Interprétation de la solution : A cet étape, il faut vérifier que les résultats mathématiques s'adaptent avec l'intuition physique et les expériences faites au laboratoire, sinon le modèle devrait être réexaminé.

Dans ce chapitre, on étudiera uniquement l'étape 2 et on s'intéressera aux équations différentielles du premier ordre et aux équations différentielles linéaires du premier et du second ordre.

## 2 Équations différentielles du premier ordre

### 2.1 Généralités

Ce sont les équations différentielles de la forme :

$$f(x, y, y') = 0$$

Cette équation est implicite, puisque la fonction dérivée n'est pas donnée de manière explicite comme fonction de  $x$  et  $y$ . Par exemple,

$$e^{y'^2} - 2xy' + y = \sin(x + y)$$

est une équation différentielle implicite. En général, écrire  $y'$  en fonction de  $y$  est assez difficile, on se restreint alors à l'étude des équations différentielles explicites :

$$y' = f(x, y)$$

où  $f$  est une fonction numérique à deux variables.

**Définition 2.1** Soit  $D$  un domaine de  $\mathbb{R} \times \mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) et  $f$  une application de  $D$  dans  $\mathbb{R}$ . Étant donnée un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , une solution sur  $I$  de l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = f(x, y)$$

est une fonction  $\varphi$  de  $I$  dans  $\mathbb{K}$  dérivable sur  $I$  et telle que :

$$\forall t \in I, \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)).$$

**Définition 2.2** Soit  $(x_0, y_0) \in D$ , résoudre le problème de CAUCHY pour l'équation (E) en  $(x_0, y_0)$ , c'est trouver toutes les solutions  $\varphi$  de (E) sur  $I$  telles que  $x_0 \in I$  et  $\varphi(x_0) = y_0$ .

Énonçons le théorème suivant que nous admettrons :

**Théorème 2.1** Soit  $(x_0, y_0)$  dans le domaine de  $f$ . Supposons que  $f(x, y)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  soient continues au voisinage de  $(x_0, y_0)$ . Alors il existe un intervalle ouvert  $I$  contenant  $x_0$  et une solution unique de l'équation

$$y' = f(x, y)$$

définie sur  $I$  et dont le graphe passe par  $(x_0, y_0)$ .

**Remarques :** Sous les hypothèses du théorème, on obtient les conclusions suivantes :

1. Il existe une solution unique qui passe par  $(x_0, y_0)$ .
2. Par unicité et dans le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , deux courbes intégrales ( courbes de solutions de l'équations différentielles ) ne se coupent jamais.
3. Le théorème n'assure que l'existence locale de la solution, on est incapable de répondre à la question si cette solution peut être définie sur un intervalle assez grand en gardant l'unicité.

### 2.2 Exemples

1. Soit l'équation différentielle :

$$y' = xy^2$$

Dans cet exemple, on a  $f(x, y) = xy^2$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy$  qui sont évidemment définies et continues sur  $\mathbb{R}^2$ . On en déduit que pour tout point  $(x_0, y_0)$  de  $\mathbb{R}^2$ , il existe une unique solution  $y$  telle que  $y(x_0) = y_0$ . Cherchons, par exemple, la solution qui passe le point  $x_0 = 0, y_0 = 2$ .

$$y' = xy^2 \iff \frac{dy}{y^2} = x dx$$

d'où

$$\frac{-1}{y} = \frac{x^2}{2} + C \text{ ou encore } y = \frac{-2}{2C+x^2}$$

et  $y(0) = 2$  implique  $C = \frac{-1}{2}$ , donc

$$y(x) = \frac{2}{1-x^2}$$

On remarque que cette solution n'est pas définie sur toute la droite réelle.

2. Les solutions de  $y' = y + x$  sont définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $y_k : x \mapsto -1 - x + k e^x$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

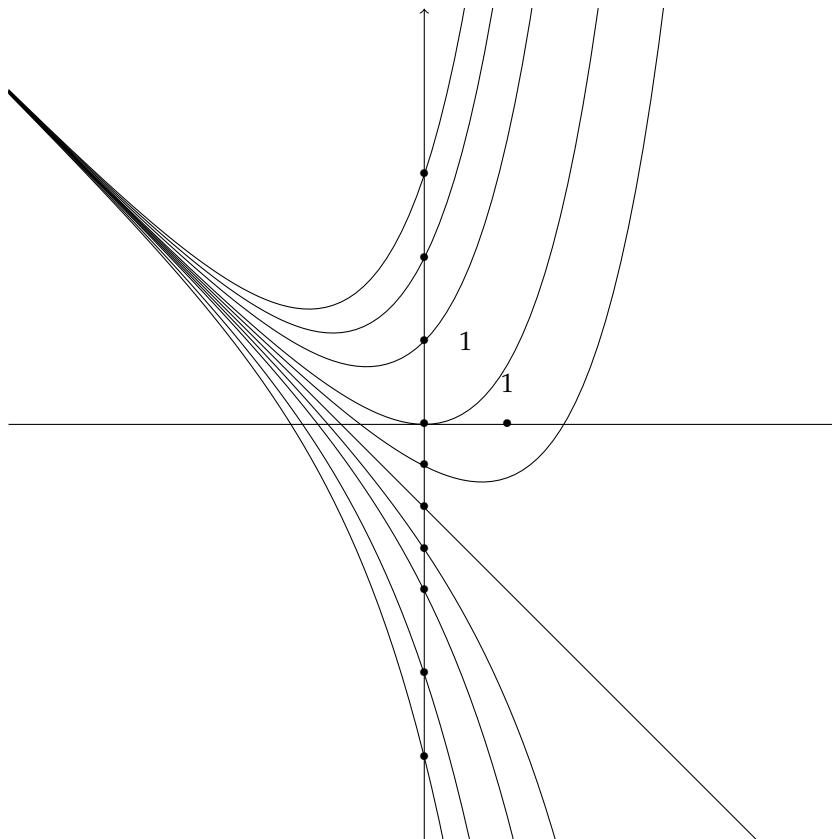


FIGURE : Les courbes intégrales de l'équation  $y' = y + x$ .

3. L'équation différentielle

$$y' = \frac{-1}{x^2}$$

satisfait les hypothèses du théorème partout sauf aux points  $(0, y_0)$ . D'ailleurs en intégrant cette équation, on obtient

$$y(x) = \frac{1}{x} + C$$

fonction qui n'est pas définie en  $x_0 = 0$ .

4. Les fonction  $y(x) = x$  et  $y(x) = -x$  sont solutions de l'équation

$$(1) \quad yy' = x$$

Leurs courbes intégrales passent par le point  $(0, 0)$ . L'équation (1) s'écrit sous la forme  $y' = f(x, y)$  avec  $f(x, y) = \frac{x}{y}$  qui n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

5. Soit à résoudre l'équation :

$$y' = e^{x+y}$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme  $e^x dx = e^{-y} dy$ , donc il existe une constante  $C$  telle que

$$e^x + C = -e^{-y}$$

les solutions sont alors les fonctions

$$\varphi : \begin{array}{ccc} ]-\infty, a[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\ln(e^a - e^x) \end{array} .$$

### 3 Équations différentielles linéaires du premier ordre

**Définition 3.1** Une équation différentielle linéaire d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) est une équation de la forme :

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

où  $a_1, a_2, \dots, a_n, f$  sont des fonctions définies et continues sur un intervalle  $I$ . La notation  $y^{(k)}$  désigne la dérivée d'ordre  $k$  de  $y$ .

Donc une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation de la forme :

$$(E) \quad y' + a(x)y = f(x)$$

où  $a$  et  $f$  sont des fonctions définies et continues sur un intervalle  $I$ .

Considérons l'équation sans second membre ( l'équation homogène) associée à  $(E)$  :

$$(H) \quad y' + a(x)y = 0$$

Soit  $y_0$  une solution particulière de  $(E)$ , donc  $y$  est une solution de  $(E)$  si et seulement si  $y' + a(x)y = f(x)$  et on a  $y'_0 + a(x)y_0 = f(x)$ , donc  $(y - y_0)' + a(x)(y - y_0) = 0$ , c'est à dire  $y - y_0$  est une solution de  $(H)$ .

D'où :

$$y = y_0 + y_f$$

avec  $y_f$  la solution générale de  $(H)$

|                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------|
| solution générale de $(E)$ = solution particulière de $(E)$ + solution générale de $(H)$ |
|------------------------------------------------------------------------------------------|

#### 3.1 Solution générale de $(H) : y' + a(x)y = 0$

Soit  $A$  une primitive de la fonction  $-a$ , on pose  $y = ce^{A(x)}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , alors :

$$y' = cA'(x)e^{A(x)} = -a(x)y$$

entraîne  $y' + ay = 0$ , donc  $y = ce^{A(x)}$  est la solution générale de  $(H)$

**Remarque :** On pose  $S : \{f \in \mathcal{C}^1(I) / f' + af = 0\}$ , on montre que  $S$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^1(I)$ , de dimension 1, donc il suffit de déterminer un générateur de  $S$  qui sera la solution générale de l'équation  $(H)$ .

**Exemples :**

1.  $y' + \frac{1}{x}y = 0$ ,  $x > 0$ . La solution générale, définie sur  $]0, +\infty[$ , est  $y = ce^{\int \frac{-1}{x} dx} = \frac{c}{x}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .
2.  $xy' + (x+2)y = 0$ ,  $x > 0$ . La solution générale, définie sur  $]0, +\infty[$ , est  $y = ce^{\int -\frac{x+2}{x} dx} = cx^2e^{-x}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

#### 3.2 Solution particulière de $(E) : y' + a(x)y = f(x)$

**La méthode de la variation de la constante :** la solution générale de  $(H)$  est  $y = ce^{A(x)}$ , on va supposer  $c$  comme une fonction de  $x$  et on cherche  $c$  de telle sorte que  $y = c(x)e^{A(x)}$  soit une solution de  $(E)$ .

$$\begin{aligned} y = c(x)e^{A(x)} \text{ solution de } (E) &\iff c'(x)e^{A(x)} + c(x)A'(x)e^{A(x)} + a(x)c(x)e^{A(x)} = f(x) \\ &\iff c'(x)e^{A(x)} = f(x) \\ &\iff c'(x) = e^{-A(x)}f(x) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{R} : c(x) = \int e^{-A(x)}f(x)dx + k \end{aligned}$$

Donc la solution générale de  $(E)$  est :

$$y = \underbrace{e^{A(x)} \int e^{-A(x)}f(x)dx}_{\text{Solution particulière de } (E)} + \underbrace{ke^{A(x)}}_{\text{Solution générale de } (H)}$$

Exemples :

1.  $2y' + y = 3 \iff y' + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}$  et par conséquent :

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \int \frac{3}{2} e^{\frac{1}{2}x} dx + c e^{-\frac{1}{2}x} = 3 + c e^{-\frac{1}{2}x}.$$

2.  $xy' - 3y = x^2 + 2x, x > 0$ . On obtient  $y(x) = -x^2 - x + kx^3, k$  constante.

3.  $\begin{cases} \cos x \cdot y' - y \sin x = 1, \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$  La solution générale est  $y(x) = \sin x + \cos x$ .

Applications :

**1) Désintégration des corps radioactifs :** L'étude expérimentale montre que les substances radioactives se désintègrent à un taux proportionnel à la quantité présente. C'est à dire, si  $N(t)$  est le nombre d'atomes d'une substance radioactive présente à l'instant  $t$ , alors :

$$\frac{dN}{dt} = -kN \quad (1)$$

où  $k$  est une constante positive, appelée constante de désintégration.

La solution de (1) est

$$N(t) = C e^{-kt}$$

Si  $N(0) = N_0$  est le nombre initial des atomes à l'instant  $t = 0$ , alors  $N(t) = N_0 e^{-kt}$ .

À partir de cette équation on peut déterminer le temps  $t$  que met la substance pour se désintégrer de la quantité  $N_0$  à  $N(t)$ , en effet :

$$t = \frac{-1}{k} \ln \left( \frac{N(t)}{N_0} \right) \quad (2)$$

la formule (2) est utilisée en Archéologie, Paléontologie, Géologie et en Art pour trouver l'âge des vieux objets (pierres, fossiles, pièces d'art, etc...)

Pour trouver la constante  $k$ , on utilise la *demi-vie* de la substance radioactive, c'est à dire la durée  $T$  que met la moitié de la substance pour se désintégrer. On trouve

$$T = \frac{-1}{k} \ln \left( \frac{1}{2} \right) \text{ ou } k = \frac{\ln 2}{T}$$

**2) Loi de refroidissement de NEWTON :** Au cours de l'enquête sur un meurtre ou une mort accidentelle, il est important de connaître l'heure où la mort a eu lieu. À partir d'observations expérimentales, on établit que la température de la surface du corps change proportionnellement à la différence entre la température du corps et celle du milieu environnant. Soit  $\theta(t)$  la température de l'objet à l'instant  $t$  et  $T$  celle du milieu, alors  $\theta$  doit satisfaire l'équation :

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - T) \quad (*)$$

où  $k$  est une constante.

Supposons qu'un corps est découvert à l'instant  $t = 0$ , et que sa température est égale à  $\theta_0$ . Si la mort a lieu à l'instant  $t_m$ , alors la température du corps est égale à  $\theta_m = 37^\circ\text{C}$ . La résolution de l'équation (\*) donne :

$$\theta(t) = T - (\theta_0 - T)e^{-kt}$$

Pour déterminer  $k$ , il suffit de mesurer la température  $\theta_1$  du corps à un moment ultérieur  $t_1 > 0$ . En effet :

$$\theta_1 - T = (\theta_0 - T)e^{-kt_1}$$

d'où

$$k = -\frac{1}{t_1} \ln \left( \frac{\theta_1 - T}{\theta_0 - T} \right)$$

et par conséquent, le temps de la mort  $t_m$  est donné par :

$$t_m = -\frac{1}{k} \ln \left( \frac{\theta_m - T}{\theta_0 - T} \right).$$

## 4 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Rappelons qu'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants s'écrit :

$$(E) \quad y'' + ay' + by = f(x)$$

où  $a$  et  $b$  sont des réels et  $f$  une fonction donnée.

L'équation homogène associée à  $(E)$  est :

$$(H) \quad y'' + ay' + by = 0$$

Soit  $y_0$  une solution particulière de  $(E)$ , donc  $y$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $y' + a(x)y = f(x)$  et on a  $y'_0 + a(x)y_0 = f(x)$ , donc  $(y - y_0)' + a(x)(y - y_0) = 0$ , c'est à dire  $y - y_0$  est solution de  $(H)$ .

D'où :

solution générale de  $(E)$  = solution particulière de  $(E)$  + solution générale de  $(H)$

**Remarque :** On pose  $S : \{f \in C^1(I) / f'' + af' + bf = 0\}$ , on montre que  $S$  est un sous-espace vectoriel de  $C^1(I)$ , de dimension 2, donc il suffit de déterminer une famille génératrice et libre à deux éléments de  $S$  et la solution générale de l'équation  $(H)$  sera toute combinaison linéaire de ces deux éléments.

### 4.1 Solution générale de $(H) : y'' + ay' + by = 0$

La résolution de l'équation  $y'' + ay' + by = 0$  est basée sur l'idée qui consiste à chercher des solutions de la forme  $y(x) = e^{rx}$ . donc  $(e^{rx})'' + a(e^{rx})' + b(e^{rx}) = (r^2 + ar + b)e^{rx} = 0$

Par conséquent  $y(x) = e^{rx}$  est solution si, et seulement si,  $r^2 + ar + b = 0$  (équation caractéristique de  $(H)$ ).

**Théorème 4.1** Considérons l'équation différentielle  $y'' + ay' + by = 0$ , l'équation caractéristique associée est :

$$r^2 + ar + b = 0$$

**1. Si on a deux racines réelles distinctes  $r_1$  et  $r_2$  alors la solution générale est donnée par :**

$$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$$

**2. Si on a une racine double  $r$  alors :**

$$y(x) = (\alpha + \beta x)e^{rx}$$

**3. Si on a deux racines complexes  $r + is$  et  $r - is$  alors la solution générale est donnée par :**

$$y(x) = e^{rx}(\alpha \cos sx + \beta \sin sx)$$

**Exemples :**

1.  $y'' - 2y' - 8y = 0$ ,  $y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-2x}$ ,  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes.
2.  $y'' - 4y' + 4y = 0$ ,  $y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$ ,  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes.
3.  $y'' + 2y' + 10y = 0$ ,  $y(x) = e^{-x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$ ,  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes.

### 4.2 Solution particulière de $(E) : y'' + ay' + by = f(x)$

**Théorème 4.2** Les étapes qui permettent d'avoir une solution particulière de l'équation :

$$y'' + ay' + by = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_m(x) \quad (E)$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des constantes et les  $f$  sont des fonctions données, sont :

**1. On considère les équations :**

$$y'' + ay' + by = f_i(x) \quad (E_i)$$

**pour chaque  $i = 1, 2, \dots, m$ .**

## 2. Chercher une solution particulière $Y_i$ de (\*). On procède de la façon suivante :

• Si

$$f_i(x) = e^{\alpha x} p_n(x),$$

où  $p_n$  est une fonction polynômial de degré  $n$ , alors on a :

$$Y_i(x) = e^{\alpha x} x^s (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n)$$

où les constantes  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont à déterminer et  $s = 0, 1, 2$ . La puissance  $s$  est égale à 0 si  $\alpha$  n'est pas racine de l'équation caractéristique. Si  $\alpha$  est une racine simple alors  $s = 1$  et si  $\alpha$  est une racine double alors  $s = 2$ .

• Si

$$f_i(x) = e^{\alpha x} p_n(x) \cos(\beta x)$$

ou

$$f_i(x) = e^{\alpha x} p_n(x) \sin(\beta x)$$

où  $p_n$  est une fonction polynômial de degré  $n$ , alors on a :

$$Y_i(x) = e^{\alpha x} x^s [(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) \cos(\beta x) + (b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n) \sin(\beta x)]$$

où les constantes  $a_i, b_i$  sont à déterminer et  $s = 0, 1$ . La puissance  $s$  est égale à 0 si  $\alpha + i\beta$  n'est pas racine de l'équation caractéristique. Si  $\alpha + i\beta$  est une racine alors  $s = 1$ .

## 3. La fonction $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ est une solution particulière de l'équation initiale.

Exemple : Considérons l'équation différentielle :

$$y'' + 4y = x^2 e^{-3x} \sin(x) - x \sin(2x) \quad (*)$$

La résolution de l'équation homogène  $y'' + 4y = 0$  donne

$$y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

Une solution particulière de

$$y'' + 4y = x^2 e^{-3x} \sin(x)$$

s'écrit de la forme

$$Y_1(x) = e^{-3x} ((Ax^2 + Bx + C) \cos(x) + (Dx^2 + Ex + F) \sin(x))$$

De même une solution particulière de  $y'' + 4y = -x \sin(2x)$  est de la forme

$$Y_2(x) = x((Gx + H) \cos(2x) + (Ix + J) \sin(2x))$$

Par conséquent, la solution particulière de l'équation (\*) est de la forme  $Y = Y_1 + Y_2$ , c'est à dire :

$$Y(x) = e^{-3x} ((Ax^2 + Bx + C) \cos(x) + (Dx^2 + Ex + F) \sin(x)) + x((Gx + H) \cos(2x) + (Ix + J) \sin(2x))$$

Remarquons qu'il y a dix constantes à déterminer.

**Applications :**

**1) Circuits électriques simples :** La somme des chutes de tension à travers les différents éléments d'un circuit électrique est égale à la force électromotrice totale mise en jeu dans ce circuit. La chute de tension à travers une résistance de  $R$  Ohms, est  $Ri$ , à travers une bobine d'inductance  $L$  Henrys de  $L \frac{di}{dt}$ , et à travers un condensateur de capacité  $C$  Farads, de  $\frac{q}{C}$ . Ici,  $i$  et  $q$  sont liées par  $i = \frac{dq}{dt}$ .

L'équation différentielle d'un circuit électrique contenant une inductance  $L$ , une résistance  $R$ , une capacité  $C$  et un générateur de force électromotrice  $E(t)$  est

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = E(t)$$

où

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t)$$

Une fois  $q(t)$  trouvée, on en déduit  $i(t) = \frac{dq}{dt}(t)$

**2) Mouvement d'un pendule :** Un pendule, de longueur  $l$  et de masse  $m$ , suspendu en un point  $P$  se déplace dans un plan vertical passant par  $P$ . On néglige toutes les forces autres que la gravité.

Soit  $\theta(t)$  l'angle que fait le fil avec la verticale à l'instant  $t$ . L'équation différentielle du pendule est de la forme :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$$

où  $g$  est la pesanteur.

Dans le cas où le mouvement est initialisé par une petite perturbation autour de la position d'équilibre, l'angle  $\theta$

reste petit et  $\sin(\theta) \simeq \theta$ . Donc l'équation (\*) s'écrit  $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$ , dont la résolution donne :

$$\theta(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{l}{g}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{l}{g}}t\right)$$

On obtient un mouvement sinusoïdale.

.....