Chapitre 15
MATRICES ET SYSTÈMES LINÉAIRES

Mohamed TARQI

Table des matières

••••••••••

1 Généralités

1.1 Définitions diverses

Définition 1.1 *On appelle matrice de type (n,p) sur $\mathbb{K}$ toute application de $\{1,2,...,n\}\times\{1,2,...,p\}$ dans $\mathbb{K}$. Une matrice est donc une famille double finie :*

$$\begin{array}{ccc}\{1,2,...,n\}\times\{1,2,...,p\} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i,j) & \longmapsto & a_{ij}\end{array}$$

Une matrice A sera représentée soit par :

$$A=(a_{ij})_{1\le i\le n,1\le j\le p} \ ou \ \ A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2p}\\ . & . & . & . & .\\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{np}\end{pmatrix}$$

Nous dirons que A est une matrice de type (n,p) (n nombre de $lignes$, p nombre de $colonnes$) leur ensemble est désigné par $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Cas particuliers :
• Si $p=n$ on dit la matrice A est $carrée\ d'ordre\ n$, les éléments a_{ii} sont appelés éléments $diagonaux$ de A ; leur ensemble est la $diagonale\ principale$ de A. L'ensemble des matrices carrées, d'ordre n, sera noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
• Si $p=1$ on dit la matrice est $unicolonne$.
• Si $n=1$ on dit la matrice est $unilgne$.

Définition 1.2 *On appelle transposée de la matrice $A=(a_{ij})_{1\le i\le n,1\le j\le p}$ la matrice $B=(b_{ij})_{1\le i\le p,1\le j\le n}$ avec $b_{ij}=a_{ji}$, on la note ${}^tA$*

Remarque : Si $A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors ${}^tA\in\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, et si

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2p}\\ . & . & . & . & .\\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{np}\end{pmatrix} \text{ alors } {}^tA=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & . & . & a_{1n}\\ a_{12} & a_{22} & . & . & a_{2n}\\ . & . & . & . & .\\ a_{1p} & a_{2p} & . & . & a_{np}\end{pmatrix}$$

Exemples :

$${}^t\begin{pmatrix}a & b & c\\ a' & b' & c'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & a'\\ b & b'\\ c & c'\end{pmatrix} \text{ et } {}^t\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & . & . & . & x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ .\\ .\\ .\\ x_n\end{pmatrix}$$

Définition 1.3 *On dit qu'une matrice A est $symétrique$ si et seulement si ${}^tA=A$ et on dit qu'elle $antisymétrique$ si et seulement si ${}^tA=-A$.*

Remarques : • Une matrice $A=(a_{ij})_{1\le i\le n,1\le j\le p}$ est symétrique si et seulement si $p=n$ et pour tout $i,j=1,2,...,n$ $a_{ij}=a_{ji}$.
• Une matrice $A=(a_{ij})_{1\le i\le n,1\le j\le p}$ est antisymétrique si et seulement si $p=n$ et pour tout $i,j=1,2,...,n\tilde{}$ $a_{ij}=-a_{ji}$, en particulier on a $2a_{ii}=0$ pour tout $i=1,2,...,n$.

Définition 1.4 *Les matrices carrées suivantes, d'ordre n, sont appelées respectivement, matrice triangulaire supérieure, diagonale, unité :*

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & . & . & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & . & . & a_{2n}\\ 0 & 0 & . & . & a_{2n}\\ . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & . & 0 & a_{nn}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a_{11} & 0 & . & . & 0\\ 0 & a_{22} & . & . & 0\\ . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & . & . & a_{nn}\end{pmatrix}, I_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & . & . & 0\\ 0 & 1 & . & . & 0\\ . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & . & . & 1\end{pmatrix}$$

1.2 Matrice et application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et n, $\mathscr{B}_E = \{e_1, e_2, ..., e_p\}$ une base de E et $\mathscr{B}_F = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ une base de F et enfin f une application linéaire de E dans F.
$\forall j = 1, 2, ..., p$, $\exists a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1, 2, ..., n$ tels que

$$f(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + ... + a_{nj}f_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}f_i$$

Définition 1.5 *On appelle matrice de l'application linéaire f la matrice $(a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$, on la note $M(f, (e_i), (f_j))$ ou $M_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)$.*

Les vecteurs colonnes de $M(f, (e_i), (f_j))$ sont $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_p)$, matriciellement :

$$M(f, (e_i), (f_j)) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2p} \\ & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{np} \end{pmatrix}_{(f_1, f_2, ..., f_n)} \end{array}$$

Théorème 1.1 **Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et n, $\{e_1, e_2, ..., e_p\}$ une base de E et $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ une base de F.**
L'application

$$f \longmapsto M(f, (e_i), (f_j))$$

est une bijection de $\mathscr{L}(E, F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Démonstration : À toute matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on peut associé une application linéaire f, unique, de E dans F, en posant, pour chaque j :

$$f(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + ... + a_{nj}f_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}f_i.$$

□

Remarque : Si $E = F$ (f est un endomorphisme), la matrice A associée à f est une matrice carrée, en général on prend la même base $\mathscr{B}$ pour E considéré comme espace de départ et espace d'arrivé, on écrit alors :

$$A = M(f, (e_i), (e_j)) = M(f, (e_i)) = M_{\mathscr{B}}(f)$$

Exemples :

1. Soit E un espace vectoriel de dimension n et id_E l'application identique de E :

$$\begin{array}{rccc} id_E : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

   Si on prend la même base (e_i) pour E alors :

$$M(id_E, (e_i)) = I_n \ \ \textit{(la matrice unité d'ordre n)}$$

2. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y) = (2x - y, -3x, 3x - 5y)$$

   relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ on a :

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$$

3. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x,y,z) = (2x - y - z, 3x - 5y - 2z)$$

relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ on a :

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

2 Opérations algébriques sur les matrices

2.1 L'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

E et F désignent deux espaces vectoriels de dimension respective p et n. Soient $A = (a_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le p}$ et $B = (b_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le p}$ deux matrices de type (n,p) de $\mathbb{K}$, elle sont associées respectivement à deux applications linéaires f et g de E dans F, E est rapporté à une base $(e_i)_{1\le i\le p}$ et F à une base $(f_i)_{1\le j\le n}$.
Nous posons par définition :

$$A + B = M(f,(e_i),(f_j)) + M(g,(e_i),(f_j)) = M(f+g,(e_i),(f_j))$$

$$\lambda A = \lambda M(f,(e_i),(f_j)) = M(\lambda f,(e_i),(f_j))) \ \ (\lambda \in \mathbb{K})$$

Il est clair que :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le p}$$

et

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le p} \ \ (\lambda \in \mathbb{K})$$

et on a, d'une manière évidente, le résultat suivant :

Proposition 2.1 **$(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, .)$ à une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et l'application**

$$f \longmapsto M(f,(e_i),(f_j)) = (a_{ij})$$

définie par :

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i, \ \ \forall (1 \le j \le p)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2.2 Base canonique et dimension de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soit la matrice $A = (a_{ij})$ de type (n,p) ; nous avons

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} E_{ij}$$

E_{ij} étant la matrice de type (n,p) dont tous les éléments sont nuls sauf l'élément d'indice (i,j) qui est égal à 1, donc

$$E_{ij} = \underbrace{\begin{pmatrix} & O & \\ O & 1 & O \\ & O & \end{pmatrix}}_{\text{colonne } j} \Big\} \longleftarrow \text{ligne } i$$

ces np matrices E_{ij} engendrent donc $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; elles sont indépendantes, en effet :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} E_{ij} = 0 \Longrightarrow (a_{ij})_{(1\le i\le n, 1\le j\le p)} = O \Longrightarrow a_{ij} = 0 \text{ pour tout } i \text{ et pour tout } j$$

d'où le théorème :

Théorème et définition 2.1 **La famille $(E_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le p}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.**
$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ sont isomorphes de dimension np.

Remarque : Nous retrouvons ainsi, grâce à l'isomorphisme $\mathscr{L}(E,F) \longrightarrow \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, que

$$\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F.$$

2.3 Produit de deux matrices

Soit trois espaces vectoriels E,F,G de dimensions respectives p,n,m sur $\mathbb{K}$, et des bases respectives $(a_k)_{1\leq k\leq p}$, $(b_j)_{1\leq j\leq n}$, $(c_i)_{1\leq i\leq m}$ considérons les trois applications linéaires $f,g,g\circ f$ et les trois matrices :

$$A = M(f,(a_k),(b_j)) = (\alpha_{jk})_{1\leq j\leq n, 1\leq k\leq p}$$

$$B = M(g,(b_j),(c_i)) = (\beta_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$$

$$C = M(g\circ f,(a_k),(c_i)) = (\gamma_{ik})_{1\leq i\leq m, 1\leq k\leq p}$$

Définition 2.1 *On pose, par définition,* $C = BA = M(g,(b_j),(c_i))M(f,(a_k),(b_j)) = M(g\circ f,(a_k),(c_i))$

Remarque : Remarquons que : $A = M(f) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = M(g) \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $C = BA = M(g\circ f) \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et que $\operatorname{card}\{colonnes\ \ de\ \ B\} = \operatorname{card}\{lignes\ \ de\ \ A\}$.

Calcul de coefficients de $C = BA$.
$\forall k \in \{1,2,\dots,p\}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}(g\circ f)(a_k) &= g[f(a_k)] = g[\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} b_j] \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} g(b_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} c_i \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\beta_{ij} c_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{ij} c_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} [\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{ij}] c_i\end{aligned}$$

et par définition on peut écrire :

$$(g\circ f)(a_k) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ik} c_i$$

d'où, par identification :

$$\forall i \in \{1,2,\dots,m\}, \quad \forall k \in \{1,2,\dots,p\}, \quad \gamma_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\alpha_{jk}$$

On peut représenter cette règle de calcul par le schéma suivant :

$$\begin{array}{cc} p & \begin{pmatrix} \\ \gamma_{ik} \\ \\ \end{pmatrix} \\ & m \end{array} = \begin{array}{c} m \begin{pmatrix} \beta_{i1} & \beta_{i2} & \cdot & \beta_{ij} & \cdot & \beta_{in} \end{pmatrix} \\ n \end{array} \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \cdot \\ \alpha_{jk} \\ \cdot \\ \alpha_{nk} \end{pmatrix} & n \\ p & \end{array}$$

Remarque : L'élément γ_{ik} (i numéro de la ligne, k numéro de colonne) provient des éléments de la LIgne i de B et des éléments de la COlonne k de A.
On dit qu'on a effectué le produit BA LIgnes à COlonnes (en abrégé "produit LICO").

Notations matricielles : Soit f une application linéaire de E dans F. $(e_i)_{1\le i\le p}$ une base de E, $(f_j)_{1\le i\le n}$ une base de F et $A = M(f,(e_i),(f_j))$.

$\forall (x,y)\in E\times F$, on pose $X = M(x,(e_i)) = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ .\\ .\\ a_p\end{pmatrix}$, $Y = M(y,(f_j)) = \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ .\\ .\\ y_n\end{pmatrix}$. X et Y sont les matrices unicolonnes associées respectivement aux vecteurs x et y dans les bases $(e_i)_{1\le i\le p}$ et $(f_j)_{1\le j\le n}$. On a :

$$\underbrace{y = f(x)}_{Notation\ \ vectorielle} \iff \underbrace{Y = AX}_{Notation\ \ matricielle}$$

Proposition 2.2 **$(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,.,\times)$ à une structure d'algèbre sur $\mathbb{K}$.**

Démonstration :

1. $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, en particulier $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+)$ est un groupe.
2. La seconde loi $\times$ est interne, associative et distributive par rapport à l'addition. L'élément neutre est la matrice de l'identité.
3. On a vu que
$$\forall \lambda\in\mathbb{K},\ \ \forall (A,B)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \ (\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB).$$

□

Remarque : Si $n\ge 2$, l'algèbre n'est pas commutative comme le montre l'exemple suivant :
Soit $A = \begin{pmatrix} \begin{matrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{matrix} & O\\ O & O\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{matrix} & O\\ O & O\end{pmatrix}$, avec O la matrice nulle d'ordre $n-2$.
On a $AB \ne BA$.

Proposition 2.3 **Si E est de dimension finie muni d'une base $\mathscr{B}$, l'application**

$$f \longmapsto M_{\mathscr{B}}(f)$$

est un isomorphisme d'algèbres.

Démonstration : L'application est isomorphisme d'espace vectoriel. La conclusion est une conséquence de $M_B(Id_E) = I_n$ et de :

$$\forall f\in\mathscr{L}(E),\forall g\in\mathscr{L}(E), M_B(f\circ g) = M_B(f)M_B(g)$$

□

En particulier l'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est isomorphe à $\mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ par l'application qui à toute matrice fait correspondre l'endomorphisme qui lui est canoniquement associé.

Exercice : Démontrer les propositions suivantes :

1. ${}^t(\lambda A+\mu B) = \lambda\,{}^tA + \mu\,{}^tB$ $\forall, A,B\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\forall \lambda,\mu\in\mathbb{K}$.
2. ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA,\ \ \forall A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \ \forall, B\in\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$
3. Montrer que $A\,{}^tA$ et ${}^tAA$ sont des matrices carrées symétriques.

2.4 Groupes des matrices carrées inversibles (ou régulières)

Définition 2.2 *Soit A une matrice carrée, on dit que A est* inversible *ou régulière si et seulement si l'endomorphisme f associé à A est inversible. on pose $A^{-1} = M(f^{-1})$.*

On note $\mathrm{GL_n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n inversibles.

Proposition 2.4 **Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n telles que $AB = I_n$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$.**

Démonstration : En effet, si l'on désigne par f et g les endomorphismes canoniquement associés respectivement à A et B, alors $AB = I_n$ entraîne $f \circ g = id_{\mathbb{K}^n}$. L'application f est donc surjective et comme il s'agit d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, on en déduit qu'elle bijective. Par suite A est inversible et

$$AB = I \Longrightarrow A^{-1}AB = A^{-1}$$

donc

$$A^{-1} = B.$$

□

Proposition 2.5 **Soit A et B deux matrices carrées inversibles et f, g, respectivement, les endomorphismes associés aux matrices A et B, alors :**

1. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \Longleftrightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = id_E \Longleftrightarrow AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.
3. ^tA **est inversible et** $(^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Démonstration : Par exemple pour 3., on a, puisque $A \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{K})$:

$$^tA\,^t(A^{-1}) = {}^t(AA^{-1}) = {}^tI_n = I_n$$

donc ^tA est inversible et $(^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$. □

Exercice :

1. Calculer A^n $(n \in \mathbb{N})$ pour les matrices suivantes : $(\theta, x$ des réels)

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \operatorname{ch}x & \operatorname{sh}x \\ \operatorname{sh}x & \operatorname{ch}x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \operatorname{sh}x & \operatorname{ch}x \\ \operatorname{ch}x & \operatorname{sh}x \end{pmatrix}$$

avec $\operatorname{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

2. Montrer que ces matrices sont inversibles, calculer A^{-1} et A^n pour n de $\mathbb{Z}$.

3 Changement de bases

3.1 Matrice de passage d'une base à une autre

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n, $B = (e_i)$ une base de E et $B' = (e'_i)$ une deuxième base de E.

Alors $\forall j = 1, 2, ..., n \ \ \exists p_{ij} \in \mathbb{K}, i = 1, 2, ..., n$ tels que : $e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}e_i$

On pose : $P = (p_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n}$

Théorème et définition 3.1 **La matrice P est inversible, on l'appelle la matrice de passage de la base $B = (e_i)$ à la base $B' = (e'_i)$.**

Démonstration : Soit l'application linéaire :

$$\begin{array}{cccc} id_E : & (E, B') & \longrightarrow & (E, B) \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

On a : $Id_E(e'_j) = e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}e_i$, donc $P = (p_{ij}) = M(id_E, (e'_i), (e_j))$, d'où P est inversible car l'identité est inversible et $P^{-1} = M(id_E, (e_i), (e'_i))$. □

Remarque : Soit $x \in E$. On pose $X = M(x, (e_i))$, $X' = M(x, (e'_i))$ alors on a les relations :

$$X = PX' \ \ et \ \ X' = P^{-1}X$$

3.2 Action de changements de bases dans E et dans F sur la matrice d'une application linéaire de E dans F

Soit f une application linéaire de E dans F avec $\dim E = p$ et $\dim F = n$. Soient (e_i) et (e'_i) deux bases de E et (f_j) et (f'_j) deux bases de F. On pose :

$$A = M(f(e_i),(f_j)) \ \ et \ \ A' = M(f,(e'_i),(f'_j))$$

$$P = M(id_E,(e'_i),(e_i)) \ \ et \ \ Q = M(id_E,(f'_i),(f_i))$$

Considérons le diagramme :

$$\underset{(e'_i)}{E} \xrightarrow{id_E} \underset{(e_i)}{E} \xrightarrow{f} \underset{(f_i)}{F} \xrightarrow{id_F} \underset{(f'_i)}{F}$$

on a :

$$f = id_F \circ f \circ id_E$$

et matriciellement :

$$M(f,(e'_i),(f'_j)) = M(id_E,(f_i),(f'_i))M(f,(e_i),(f_j))M(id_E,(e'_i),(e_i))$$

c'est à dire

$$A' = Q^{-1}AP$$

Remarque : On peut trouver la relation entre A et A' en utilisant uniquement des calculs sur les matrices, on pose :

$$Y = AX, \ \ X = PX', \ \ Y = QY'$$

donc

$$QY' = APX' \Longrightarrow Y' = Q^{-1}APX'$$

d'où

$$A' = Q^{-1}AP$$

Définition 3.1 *On dit que deux matrices carrées A et B sont équivalentes s'il existe deux matrices carrées inversibles P et Q telles que : $B = Q^{-1}AP$ et on écrit : $A \equiv B$*

On montre facilement le résultat suivant :

Proposition 3.1 **La relation $\equiv$ est une relation d'équivalence.**

4 Rang d'une matrice et opérations élémentaires

4.1 Définition. Propriétés

Définition 4.1 *Soit A une matrice de type (m,n), on appelle rang de la matrice A et on note $rg(A)$, le rang du système des ses vecteurs colonnes.*

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 18 & 4 \\ -3 & -2 & -2 & -2 \\ 4 & 5 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

$rg(A) = rg(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d})$ avec $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 18 \\ -2 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calculons $rg(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d})$

$$\begin{array}{cccc} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} & \vec{d} \\ \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\4\\2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3\\6\\-2\\5\\9\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}7\\18\\-2\\7\\7\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2\\4\\-2\\3\\1\end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc} \vec{a}'=\vec{a} & \vec{b}'=2\vec{b}-3\vec{a} & \vec{c}'=2\vec{c}-7\vec{a} & \vec{d}'=\vec{d}-\vec{a} \\ \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\4\\2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\3\\5\\-2\\12\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\15\\17\\-14\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cccc} \vec{a}''=\vec{a} & \vec{b}''=\vec{b}' & \vec{c}''=-\vec{c}'+5\vec{b}' & \vec{d}''=-3\vec{d}'+\vec{b}' \\ \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\4\\2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\3\\5\\-2\\12\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\8\\4\\60\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\\15\end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc} \vec{a}'' & \vec{b}'' & \vec{c}'' & \vec{d}'''=4\vec{d}''-\vec{c}'' \\ \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\4\\2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\3\\5\\-2\\12\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\8\\4\\60\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \end{array}$$

D'où :

$$rg(A) = rg(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}) = rg(\vec{a}'',\vec{b}'',\vec{c}'') = 3$$

Remarque : Les quatre vecteurs donnés sont liés par une relation que l'on obtient à partir de $\vec{d}''' = \vec{0}$. On a : $4\vec{d}'' - \vec{c}'' = \vec{0} \Longrightarrow 4(-3\vec{d}' + \vec{b}') - (-\vec{c}' + 5\vec{b}') = -\vec{b}' + \vec{c}' - 12\vec{d}' = \vec{0} \Longrightarrow -(2\vec{b} - 3\vec{a}) + 2\vec{c} - 7\vec{a} - 12(\vec{d} - \vec{a}) = \vec{0} \Longrightarrow 4\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - 6\vec{d} = \vec{0}$

Théorème 4.1 **A étant une matrice de type (n,p) associée à une application linéaire f de E dans F. Alors $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} f$.**

Démonstration : Notons $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E et $\mathscr{C} = \{f_1, f_2, ..., f_p\}$ une base de F et $A = (a_{ij})_{(1\le i\le n, 1\le j\le p)} = [C_1, C_2, ..., C_p]$, avec $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ pour $j = 1, 2, .., p$.

On a :

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i, \quad \forall (1 \le j \le p)$$

et

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} A &= \dim \operatorname{Vect}\{C_1, C_2, ..., C_p\} \\ &= \dim \operatorname{Vect}\{f(e_1), f(e_2), ..., f(e_p)\} \\ &= \operatorname{rg} f \end{aligned}$$

□

Corollaire 4.1 **Pour qu'une matrice carrée d'ordre n soit inversible il faut et il suffit qu'elle soit de rang n.**

Démonstration : En effet, cette matrice représente un endomorphisme f d'un espace vectoriel E, de dimension n sur $\mathbb{K}$ et $\operatorname{rg}(f) = n = dimE$ entraîne que f est un automorphisme, c'est à dire f est inversible. □

Définition 4.2 *Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

1. *On appelle noyau de A le sous-ensemble de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, noté $\ker A$, défini par :*

$$\ker A = \{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) / AX = 0\}.$$

2. *On appelle image de A le sous-ensemble de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, noté $\operatorname{Im} A$, défini par :*

$$\operatorname{Im} A = \{AX / X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}.$$

Remarque : On vérifie facilement que $\ker A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et que $\operatorname{Im} A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et que $p = \dim \ker A + \dim \operatorname{Im} A$. (*théorème du rang*)

Proposition 4.1 **A étant une matrice de type (n,p). Alors pour toute matrice P carrée inversible d'ordre p, $\operatorname{rg} AP = \operatorname{rg} A$ et pour toute matrice carrée inversible d'ordre n, $\operatorname{rg} QA = \operatorname{rg} A$.**

Démonstration :

1. Il est clair que $\operatorname{Im} AP \subset \operatorname{Im} A$, d'où $\operatorname{rg} AP \leq \operatorname{rg} A$. En remplaçant (A,P) par (AP,P^{-1}), on déduit : $\operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg}(AP)(P^{-1}) \leq \operatorname{rg} AP$.
2. Il est clair que $\ker A \subset \ker QA$, d'où, d'après le théorème du rang :

$$\operatorname{rg} A = p - \dim\ker A \geq p - \dim\ker QA = \operatorname{rg} QA.$$

En remplaçant (A,Q) par (QA,Q^{-1}), on déduit :

$$\operatorname{rg} QA \geq \operatorname{rg} Q^{-1}(QA) = \operatorname{rg} A.$$

□

4.2 Caractérisation des matrices de type (n,p) de rang r

Théorème 4.2 **Toutes les matrices de type (n,p) de rang r sont équivalentes à la matrice de type (n,p) :**

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ 0 & O \end{pmatrix}.$$

Démonstration : Soit A une matrice de type (n,p), elle est associée à une application linéaire f de E de dimension n dans F de dimension p. Choisissons dans E et F des bases (a_i) et (b_i), comme dans l'exercice 7 série 14, nous aurons :

$$M(f,(a_i),(b_j)) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ 0 & O \end{pmatrix}$$

□

Corollaire 4.2 **Pour que deux matrices de types (n,p) soient équivalentes, il faut et il suffit qu'elles soient de même rang.**

Corollaire 4.3 **Pour toute matrice de type (n,p), on a : $\operatorname{rg}{}^t A = \operatorname{rg} A$.**

Démonstration : En notant $r = \operatorname{rg} A$, il existe alors $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$, $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que

$$A = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & O \\ 0 & O \end{pmatrix}P$$

donc

$${}^tA = {}^tP\begin{pmatrix} I_r & O \\ 0 & O \end{pmatrix}({}^tQ)^{-1}$$

et donc $\operatorname{rg}{}^t A = \operatorname{rg} A = r$. □

D'après les résultats précédents on déduit le théorème suivant :

Théorème 4.3 **A étant une matrice de type (n,p) associée à une application linéaire f de E dans F, les trois nombres suivants sont égaux :**

1. **Rang de vecteurs colonnes.**
2. **Rang de vecteurs lignes.**
3. **Rang de f.**

Remarque : A étant une matrice de type (n,p) associée à une application linéaire f. Alors $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} f \leq \inf(n,p)$.

4.3 Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice

Définition 4.3 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.On appelle opération élémentaire sur une matrice A toute opération de l'un des types suivants :*
- *(O_1) : addition à une ligne de A le produit par un scalaire d'une autre ligne de A.*
- *(O_2) : produit d'une ligne de A par un scalaire non nul.*
- *(O_3) : permutation de deux lignes de A.*

Remarques : On pose $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ . \\ . \\ L_n \end{pmatrix}$ (les L_i désignent les lignes de A

L'opération (O_1) correspond à la transformation $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$ $(i \neq j)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
L'opération (O_2) correspond à la transformation $L_i \longleftarrow \lambda L_j$ $(\lambda \in \mathbb{K}^*)$.
L'opération (O_3) correspond à la permutation $L_i \longleftarrow L_j$ $(i \neq j)$.
On montre le résultat suivant : $(E_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. La permutation $L_i \longleftrightarrow L_j$ revient à la multiplication à droite par la matrice inversible $P_{ij} = I_p + (E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj})$.($P_{ij}$ est inversible puisque $P_{ij}^2 = I_p$)
2. Le remplacement $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$ $(i \neq j)$ revient à la multiplication à droite par la matrice inversible $T_{ij}(\lambda) = I_p + \lambda E_{ij}$. ($T_{ij}(\lambda)T_{ij}(-\lambda) = I_p$)
3. Le remplacement $L_i \longleftarrow \lambda L_i$ revient à la multiplication à droite par la matrice inversible $D_i(\lambda) = I_p + (\lambda - 1)E_{ii}$. ($D_i(\lambda)D_i(\lambda^{-1}) = I_p$)

On déduit facilement la proposition suivante, en utilisant la proposition 3.2

Proposition 4.2 **Les opérations élémentaires sur une matrice conservent le rang.**

Théorème 4.4 **Soit $A \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{K})$. Alors il existe une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes qui transforme A en la matrice unité I_n et cette même suite d'opérations élémentaires sur les lignes transforme la matrice I_n en la matrice A^{-1}.**

4.4 Exemples

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $rgA = 2$, donc A est inversible.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad L_1 \longleftarrow L_1 + L_2 \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_2 \longleftarrow \frac{-1}{3} L_2 \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} L_3 \longleftarrow L_3 - L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice à gauche est inversible donc A est inversible, on continue :

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \longleftarrow 4L_1 + L_3 \\ L_2 \longleftarrow -4L_2 + L_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2 \begin{bmatrix} -3 & 9 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \longleftarrow \frac{1}{4}L_1 \\ L_2 \longleftarrow \frac{1}{4}L_2 \\ L_3 \longleftarrow \frac{-1}{4}L_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{-3}{4} & \frac{9}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-5}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix}$$

d'où $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 9 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} L_3 \longleftarrow L_3 + L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$rgA = 2 < 3$, on s'arrête ici : la matrice A n'est pas inversible.

5 Généralités et définitions

Définition 5.1 *Un système (S) de m équations linéaires à coefficients dans $\mathbb{K}$ à n inconnues $x_1, x_2, ..., x_n$ est la donnée des équations suivantes :*

$$(S) = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

1. $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{i1n}x_n = b_i$, $i = 1, 2, ..., m$ est la i^{eme} équation du système, on la note L_i, dans cette équation, les a_{ij} sont les coefficients des inconnues x_j et b_i est le coefficient du second membre.

2. Lorsque tous les b_i sont nuls le système (S) est dit $homogéne$.
3. On appelle solution du système (S) tout n-uplet, d'éléments de $\mathbb{K}$, $(c_1, c_2, ..., c_n)$ qui vérifié les m équations du système.
4. Le système (S) est déterminé par la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

appelée matrice complète du système.

6 Interprétation d'un système

6.1 Interprétation vectorielle

Le système précédent (S) étant donné, considérons les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ définis par :

$$\vec{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}), \quad j = 1, 2, ..., n \quad \text{et} \quad \vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_m)$$

le système (S) est alors équivalent à l'équation vectorielle (S_1) suivante :

$$(S_1) : x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + ... + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$$

Théorème 6.1 **Tout système (S) de m équations linéaires à n inconnues est équivalent à une équation de la forme $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + ... + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$ où $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n, \vec{b}$ sont des vecteurs donnés de $\mathbb{K}^m$. De plus la condition $\vec{b} \in Vect(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n)$ est une condition nécessaire et suffisante pour que (S) admet au moins une solution. Cette condition étant vérifiée, (S) admet une seule solution si et seulement si la famille $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ est libre, plus d'une solution si elle est liée.**

6.2 Interprétation à l'aide d'une application linéaire

Le système précédent (S) étant donné.
Notons $(e_i)_{1 \le i \le n}$ et $(\varepsilon_j)_{1 \le j \le m}$ respectivement les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$, définissons l'application linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ par :

$$\varphi(e_i) = \sum_{j=0}^{m} a_{ji}\varepsilon_j = (a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{mi})$$

(la colonne des coefficients de l'inconnue x_i)

Le système (S) est équivalent à l'équation :

$$(S_2) : \varphi(x) = b$$

où $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $b = (b_1, b_2, ..., b_m) \in \mathbb{K}^m$

Théorème 6.2 **Tout système (S) de m équations linéaires à n inconnues est équivalent à une équation de la forme $\varphi(x) = b$ où φ est une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^m$, de plus la condition $b \in Im\varphi$ est une condition nécessaire et suffisante pour que (S) admet au moins une solution. Cette condition étant vérifiée, l'ensemble des solutions de (S) s'obtient en ajoutant à l'une d'elles les vecteurs de $\ker\varphi$, c'est à dire les solutions du système homogène associé à (S).**

Exercice : Soit $m \in \mathbb{R}$. Montrer que le système (S) admet une solution unique si et seulement si m est différent de -1

$$(S) = \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ -x + y + mz = 1 \end{cases}$$

7 Transformations élémentaires d'un système

Définition 7.1 *Deux systèmes sont dits équivalents s'ils ont même ensemble de solutions*

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
Le système précédent (S) étant donné.
Considérons deux équations L_i et L_j $(i \neq j)$ du système (S), $L_j + \lambda L_i$ est l'équation définie par :

$$(a_{j1} + \lambda a_{i1})x_1 + (a_{j2} + \lambda a_{i2})x_2 + \ldots + (a_{jn} + \lambda a_{in})x_n = b_j + \lambda b_i$$

On considère alors les transformations suivantes :

1. **Permutation de deux équations** $L_i \longleftrightarrow L_j$
   Pour $i \neq j$, $L_i \longleftrightarrow L_j$ signifie que l'on permute la i^{eme} équation et la j^{eme} équation du système. Il est immédiat que le second système est équivalent au premier.
2. **Transformation** $L_j \to L_j + \lambda L_i$
   Pour $i \neq j$, $L_j \to L_j + \lambda L_i$ signifie que l'on remplace la j^{eme} équation du système par $L_j \to L_j + \lambda L_i$

Comme les systèmes

$$\begin{cases} L_i \\ L_j \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} L_i \\ L_j + \lambda L_j \end{cases}$$

sont équivalents, alors si dans un système on remplace la j^{eme} équation du système par l'équation $L_j + \lambda L_i$ on obtient un système équivalent au premier.

8 Résolution d'un système linéaire

Notons que le système (S) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$(S_3) : Ax = b$$

où

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad b = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \in \mathbb{K}^m, \quad A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

8.1 Méthode de pivot de Gauss

Elle consiste en une seule suite finie de transformation élémentaires qui vont associer au système (S) un système (S') équivalent dont la résolution est immédiate. Supposons $a_{11} \neq 0$ dans le système (S), la méthode consiste dans une première étape à effectuer les transformations élémentaires :

$$L_2 \to L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1, L_3 \to L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1, \ldots, L_m \to L_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}} L_1$$

de manière a obtenir un système (S') de matrice complète :

$$M' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & . & . & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & . & . & a'_{3n} & b'_3 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & a'_{m2} & . & . & a'_{mn} & b'_m \end{pmatrix}$$

dans cette première série de transformations, le coefficient non nul a_{11} s'appelle le $pivot$.

Remarques :

1. Si $a_{11} = 0$ et si $a_{i_0 1} \neq 0$ on commence par effectuer la transformation élémentaire $L_1 \longleftrightarrow L_{i_0}$.
2. Si tous les a_{i1} sont nuls, l'inconnue x_1 peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{K}$ et le système (S) se réduit en fait à un système de m équations linéaires à $n-1$ inconnues $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Ayant obtenue la matrice M', on choisit un second pivot pour le système de $m-1$ équations à $n-1$ inconnues :

$$(S') = \begin{cases} a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

Si $a'_{22} \neq 0$, on effectuer les transformations élémentaires :

$$L'_3 \to L'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}}L'_2, L'_4 \to L'_4 - \frac{a'_{42}}{a'_{22}}L'_2, \ldots, L'_m \to L'_m - \frac{a'_{m2}}{a'_{22}}L'_2$$

et on itére ainsi le procédé.

Remarques :

1. Si on obtient une équation de la forme $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b$ où $b \neq 0$, le système n'a pas de solutions. On arrête alors le processus.
2. Si on obtient une équation de la forme $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$, en la supprimant, on obtient évidement un système équivalent.

8.2 Conclusion

Après au plus $m-1$ itérations et par élimination des lignes où tous les coefficients sont nuls, on se ramène soit à un système impossible (système contenant une équation de la forme

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b \text{ où } (b \neq 0);$$

soit à un système (S') de r équations à n inconnues $(r \leq n, r \leq m)$ équivalent à (S).

9 Résolution du système (S')

Puisque $r = rgA \leq n$, dans la résolution des r équations de (S), deux cas présentent :
$1^{cas} : r = n$
Toutes les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont *principales* et le système (S') est de la forme :

$$(S') = \begin{cases} a_{12}x_1 + a_{13}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\quad +a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ \quad\quad a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases}$$

où les coefficients $a_{11}, a'_{22}, a'_{33}, \ldots, a'_{nn}$ sont non nuls. (S') est un système triangulaire. Il est immédiat que (S') et donc (S) posséde une solution unique.
$2^{cas} : r < n$
Il existe alors $n-r$ inconnues *secondaires*. Si l'on donne à ces inconnues secondaires des valeurs arbitraires, les inconnues principales sont alors déterminés par les équations de (S').
Le système (S') et par conséquent le système (S) possède une infinité de solutions.

Théorème 9.1 **Si $rgA = r = n$ le système (S') admet une solution unique donnée par :**

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b'_n}{a'_{nn}} = x_r \\ x_k = \dfrac{b'_k - \sum\limits_{j=k+1}^{n} a'_{kj}x_j}{a'_{kk}}, \quad k = n-1, \ldots, 2, 1 \end{cases} \quad avec \;\; b'_1 = b_1.$$

Sinon le système (S') admet une infinité de solutions :

$$\left\{\begin{array}{l} x_r = \dfrac{b'_r - \sum\limits_{k=r+1}^{n} a'_{rk} x_k}{a'_{kk}} \\ x_k = \dfrac{b_k - \sum\limits_{j=k+1}^{n} a'_{kj} x_j}{a'_{kk}}, \quad k = r-1, \dots, 2, 1 \end{array}\right. \qquad avec \quad (x_{r+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n-r}.$$

Exemples :

1. Soit le système (S) :

$$(S) : \left\{\begin{array}{c} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = m \end{array}\right.$$

Le système (S) a pour matrice compléte associée :

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & m \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} L_1 = L'_1 \\ L_2 \to L_2 - L_1 = L'_2 \\ L_3 \to L_3 + L_1 = L'_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & m+1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} L'_1 = L''_1 \\ L'_2 = L''_2 \\ L'_3 \to L'_3 - \frac{3}{-2} L'_2 = L''_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m+1 \end{bmatrix}$$

donc le système (S) admet pour système équivalent le système (S') suivant :

$$(S') : \left\{\begin{array}{c} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_2 - 2x_4 = 0 \\ 0 = m+1 \end{array}\right.$$

donc le système (S') admet des solutions si et seulement si $m = -1$ et dans ce cas les inconnues x_1, x_2 sont principales et x_3, x_4 sont les inconnues secondaires

L'ensemble de solutions de (S) est alors donné par :

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 = 1 + x_3 + x_4 \\ x_2 = -x_4 \end{array}\right. \quad (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2$$

2. Soit le système (S) :

$$(S) : \left\{\begin{array}{c} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = a \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = b \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = c \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = d \end{array}\right.$$

Le système (S) a pour matrice compléte associée :

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & a \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 & b \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 & c \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 & d \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} L_1 = L'_1 \\ L_2 \to L_2 - 2L_1 = L'_2 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1 = L'_3 \\ L_4 \to L_4 - 2L_1 = L'_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & b' = b - 2a \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 & c' = c - 3a \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 & d' = d - 2a \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L'_1 = L''_1 \\ L'_2 = L''_2 \\ L'_3 \to L'_3 + 4L'_2 = L''_3 \\ L'_4 \to L'_4 + 5L'_2 = L''_4 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccccl} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & b' = b - 2a \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 & c'' = c' + 4b' \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 & d'' = d' + 5b' \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L''_1 = L'''_1 \\ L''_2 = L'''_2 \\ L''_3 = L'''_3 \\ L''_4 \to L''_4 - L''_3 = L'''_4 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccccl} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & b' = b - 2a \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 & c'' = c' + 4b' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d''' = d'' - c'' \end{array}\right]$$

le système (S) admet alors pour système équivalent le système (S') définit par :

$$(S') : \left\{ \begin{array}{c} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = a \\ -x_2 - x_3 = b' \\ -8x_3 + 4x_4 - 5x_5 = c'' \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = d''' \end{array} \right.$$

1° cas : Si $d''' \neq 0$, alors on a un système impossible ($S = \emptyset$)

2° cas : Si $d''' = 0$, c'est à dire $d + b - c - a = 0$, alors on a trois pivots non nuls, les inconnues x_1, x_2, x_3 sont les inconnues principales et x_4, x_5 sont les inconnues secondaires.
L'ensemble des solutions de (S') et par conséquent de (S) est alors donné par :

$$\left\{ \begin{array}{c} x_3 = \frac{-1}{8}(c'' - 4x_4 + 5x_5) \\ x_2 = -b' - x_3 \\ x_1 = a + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \end{array} \right.$$

c'est à dire

$$\left\{ \begin{array}{c} x_3 = \frac{-1}{8}c'' + \frac{1}{2}x_4 - \frac{5}{8}x_5 \\ x_2 = -b' - \frac{1}{8}c'' - \frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{8}x_5 \\ x_1 = a - 2b' + \frac{3}{8}c'' - \frac{1}{2}x_4 + \frac{7}{8}x_5 \end{array} \right. \quad (x_4, x_5) \in \mathbb{R}^2$$

Remarque : La méthode de Gauss[1] peut être utilisée pour inverser une matrice A en résolvant le système $AX = Y$. Par exemple, soit à inverser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

pour cela résolvons le système :

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = y_2 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 = y_3 \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 = y_4 \end{array} \right.$$

On obtient

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 = 4y_1 - 6y_2 + 4y_3 - y_4 \\ x_2 = -6y_1 + 14y_2 - y_3 + 3y_4 \\ x_3 = 4y_1 - 11y_2 + 10y_3 - 3y_4 \\ x_4 = -y_1 + 3y_2 - 3y_3 + y_4 \end{array} \right.$$

et l'inverse de A est donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

• • • • • • • • • •

1. Gauss, Carl Friedrich Gauss, Carl Friedrich (1777-1855), mathématicien, physicien et astronome allemand, dit le prince des mathématiciens, qui apporta des contributions essentielles à la plupart des branches des sciences exactes et appliquées.