# Chapitre 18
# DÉTERMINANTS

**Mohamed TARQI**

## Table des matières



•••••••••••

Dans ce chapitre $E$ désigne une espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, de dimension finie.

## 1 Formes $p$-linéaires alternées sur un espace vectoriel

**Définition 1.1** *Une application de $E^p$ dans $\mathbb{K}$*

$$f: \begin{array}{ccc} E^p & \longmapsto & \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, ..., x_p) & \longmapsto & f(x_1, x_2, ..., x_p) \end{array}$$

*est multilinéaire ou $p$-linéaire si elle linéaire par rapport à chacune des $p$ composantes, c'est-à-dire que chaque application partielle $x_i \longrightarrow f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_p)$ est linéaire.*

**Exemples :**

1. Soit $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p$ $p$-forme linéaires de $E^*$, l'application de $E^p$ dans $\mathbb{K}$ définie par :

$$f(x_1, x_2, ..., x_p) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)...\varphi(x_p)$$

   est une forme $p$-linéaire.

2. Soit $f$ une forme $p$-linéaire et $\sigma \in \mathscr{S}_p$, l'application :

$$f_\sigma(x_1, x_2, ..., x_p) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)})$$

   est une forme $p$-linéaire.

3. Dans l'ensemble $E$ des vecteurs de l'espace, le produit scalaire est une forme bilinéaire. ( c'est-à-dire 2-linéaire ).
4. L'application
$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longrightarrow & \int_a^b f(t)g(t)dt \end{array}$$
est une forme linéaire sur l'espace vectoriel $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

**Définition 1.2** *Une forme $p$-linéaire sur $E$ est dite alternée si pour tout couple $(i,j)$ tel que $1 \leq i < j \leq p$ on a :*

$$f(x_1,...,x_i,...,x_j,...,x_p) = -f(x_1,...,x_j,...,x_i,...,x_p).$$

**Exemples :** Dans l'ensemble $E$ des vecteurs de l'espace :

1. le produit scalaire est une forme bilinéaire alternée.
2. Le produit mixte est une forme trilinéaire ( c'est-à-dire 3-linéaire ) alternée.

**Remarques :**

1. Si $f$ est une forme $p$-linéaire sur $E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors
$$f(\lambda x_1, \lambda x_2 ..., \lambda x_p) = \lambda^p f(x_1, x_2 ..., x_p).$$
2. Si $f$ est alternée et $x_i = xj$, alors $f(x_1,...,x_i,...,x_j,...,x_p) = 0$

**Proposition 1.1** **Soit $f$ une forme $p$-linéaire alternée sur $E$, pour toute système liée $\{x_1,x_2,...,x_p\}$ de vecteurs de $E$, on a : $f(x_1,x_2,...,x_p) = 0$.**

**Démonstration :** Comme la famille $(x_1,x_2,...,x_p)$ est liée, il existe $i$ tel que $x_i$ soit combinaison linéaire $\sum\limits_{k\neq i} \alpha_k x_k$ des autres vecteurs. On a donc :

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,...,x_p) &= f(x_1,...,x_{i-1},\sum_{k\neq i}\alpha_k x_k, x_{i+1},...,x_p) \\ &= \sum_{k\neq i}\alpha_k f(x_1,x_2,...,x_i,x_k,x_{i+1},...,x_p) \end{aligned}$$

qui est nul puisque chacune des familles $(x_1,x_2,...,x_i,x_k,x_{i+1},...,x_p)$, pour $k \neq i$, contient deux vecteurs égaux et que $f$ est alternée. □

**Corollaire 1.1** **Si $E$ est un espace vectoriel de dimension $n$, alors toute forme $p$-linéaire alternée sur $E$ avec $p > n$ est nulle.**

**Démonstration :** En effet, toute famille à $p$ éléments, $p > n$ est nécessairement liée, donc toute forme $p$-linéaire alternée est nulle. □

**Corollaire 1.2** **La valeur d'une forme $p$-linéaire alternée ne change pas lorsqu'on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs. C'est-à-dire**

$$f(x_1,...,x_i + \sum_{k\neq i} x_k,...,x_p) = f(x_1,x_2,...,x_i,...,x_p).$$

**Démonstration :** Par $p$-linéarité de $f$ et d'après la proposition précédente, on a :

$$\begin{aligned} f(x_1,...,x_i + \sum_{k\neq i} x_k,...,x_p) &= f(x_1,...,x_i,...,x_p) + f(x_1,...,x_i,\sum_{k\neq i} x_k, x_{i+1}...,x_p) \\ &= f(x_1,x_2,...,x_i,...,x_p) \end{aligned}$$

□

# 2 Expression d'une $n$-forme linéaire dans un espace vectoriel de dimension $n$

## 2.1 Calcul en dimension 2

Soit $E$ une espace vectoriel de dimension 2 et $\{a,b\}$ une base de $E$, posons

$$x = \alpha a + \beta b \text{ et } y = \alpha' a + \beta' b$$

si $f$ est une forme bilinéaire alternée sur $E$, nous aurons alors

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(\alpha a + \beta b, \alpha' a + \beta' b) \\ &= \alpha\alpha' f(a,a) + \alpha\beta' f(a,b) + \alpha'\beta f(b,a) + \beta\beta' f(b,b) \\ &= (\alpha\beta' - \alpha'\beta) f(a,b) \end{aligned}$$

D'autre part on vérifie que l'application $d$ de $E^2$ dans $\mathbb{K}$ définie par :

$$d(x,y) = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)$$

est bilinéaire alternée de plus $d(a,b) = 1$ : il existe donc des formes billinéaires alternées définies sur $E^2$ non nulles, par exemple $d$, et la formule montre que toute forme bilinéaire altérnée $f$ définie sur $E^2$ est telle que

$$f = \lambda d, \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

d'où :

**Proposition 2.1** **L'espace vectoriel des formes bilinéaires définies sur $E^2$ est de dimension 1.**

## 2.2 Cas général

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ sur $\mathbb{K}$, muni d'une base $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ et $f$ une forme $n$-linéaire alternée sur $E$. Soit $x_i = \sum_{j_i=1}^{n} a_{j_i i} e_{j_i}$, $i = 1, ..., n$ une famille de $n$ vecteurs de $E$ définis par leurs coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. Calculons $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

$$\begin{aligned} f(x_1,...,x_i,...,x_n) &= f\Big(\sum_{j_1=1}^{n} a_{j_1 1} e_{j_1}, ..., \sum_{j_i=1}^{n} a_{j_i i} e_{j_i}, ..., \sum_{j_n=1}^{n} a_{j_n n} e_{j_n}\Big) \\ &= \sum_{j_1=1}^{n} ... \sum_{j_i=1}^{n} ... \sum_{j_n=1}^{n} f(a_{j_1 1} e_{j_1}, ..., a_{j_i i} e_{j_i}, ..., a_{j_n n} e_{j_n}) \\ &= \sum_{j_1=1}^{n} ... \sum_{j_i=1}^{n} ... \sum_{j_n=1}^{n} a_{j_1 1} ... a_{j_i i} ... a_{j_n n} f(e_{j_1}, ..., e_{j_i}, ..., e_{j_n}) \\ &= \sum_{(j_1,...,j_i,...j_n)\in I^n} a_{j_1 1} ... a_{j_i i} ... a_{j_n n} f(e_{j_1}, ..., e_{j_i}, ..., e_{j_n}) \end{aligned}$$

où $I = [\![1,n]\!]$. Le développement de la dernière ligne contient $n^n$ termes, qui sont nuls dès que le même indice $i$ est choisi plusieurs fois, on somme uniquement sur les indices deux à deux distincts. Posons alors $\sigma(1) = i_1, \sigma(2) = i_2, ..., \sigma(n) = i_n$, comme les $j_i$ , $i \in [\![1,n]\!]$ sont deux à deux distincts, $\sigma \in \mathscr{S}_n$ et par suite :

$$\begin{aligned} f(x_1,...,x_i,...,x_n) &= \sum_{\sigma\in\mathscr{S}_n} a_{\sigma(1)1} ... a_{\sigma(i)i} ... a_{\sigma(n)n} f(e_{\sigma(1)}, ..., e_{\sigma(i)}, ..., e_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma\in\mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} ... a_{\sigma(i)i} ... a_{\sigma(n)n} f(e_1, ..., e_i, ..., e_n) \end{aligned}$$

**Remarque : On voit que $f$ est entièrement déterminée par la donnée de la valeur qu'elle prend en $(e_1, e_2, ..., e_n)$, donc toutes les formes $n$-linéaires alternées sur $E$ sont colinéaires, elles forment donc un espace vectoriel de dimension au plus égale à 1, nous allons montrer qu'il est de dimension 1.**
Soit $f$ une forme $n$-linéaire alternée, nous avons donc :

$$f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} ... a_{\sigma(i)i} ... a_{\sigma(n)n} f(e_1, ..., e_i, ..., e_n)$$

ou encore

$$f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = f(e_1, ..., e_i, ..., e_n) \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} ... a_{\sigma(i)i} ... a_{\sigma(n)n}$$

Considérons l'application $d$ de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ définie par :

$$d(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} ... a_{\sigma(i)i} ... a_{\sigma(n)n}$$

chaque terme du $\sum$ dépend linéairement de chacun des vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n$ donc $d$ est linéaire, d'autre par $d \neq 0$ puisque $d(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$.
Montrons enfin que $d$ est alternée. Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une famille de vecteurs comportant deux éléments égaux :

$$\forall (i, j) \in [1, n]^2, \ \ i \neq j \text{ et } x_i = x_j$$

il faut montrer que $d(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n) = 0$.
Séparons, dans $\sum$, les permutations paires et les permutations impaires :

$$d(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in \mathscr{A}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} ... a_{\sigma(i)i} ... a_{\sigma(n)n} + \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n \setminus \mathscr{A}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} ... a_{\sigma(i)i} ... a_{\sigma(n)n}$$

Soit la transposition $\tau = (i, j)$ ; l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{A}_n & \longrightarrow & \mathbf{S}_n \setminus \mathscr{A}_n \\ \sigma & \longmapsto & \sigma\tau \end{array}$$

est bijective, donc on peut écrire :

$$d(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in \mathscr{A}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} ... a_{\sigma(n)n} + \sum_{\sigma \in \mathscr{A}_n} \varepsilon(\sigma\tau) a_{\sigma\tau(1)1} ... a_{\sigma\tau(n)n}$$

D'autre part : $\varepsilon(\sigma\tau) = -\varepsilon(\sigma)$, $\sigma\tau(i) = \sigma(j)$, $\sigma\tau(j) = \sigma(i)$ et pour tout $k \neq i, j$ : $\sigma\tau(k) = k$, donc :

$$d(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in \mathscr{A}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} ... a_{\sigma(i)i} ... a_{\sigma(j)j} ... - \sum_{\sigma \in \mathscr{A}_n} \varepsilon(\sigma\tau) a_{\sigma\tau(1)1} ... a_{\sigma(j)i} ... a_{\sigma(i)j} ...$$

Comme $x_i = x_j$, alors $a_{\sigma(i)j} = a_{\sigma(i)i}$ et $a_{\sigma(j)i} a_{\sigma(j)j}$, il en résulte que $d(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, la forme $n$-linéaire est donc alternée et engendre l'espace vectoriel des $n$-formes linéaires alternées définies sur $E^n$. D'où le théorème :

**Théorème 2.1** (FONDAMENTAL) **Soit $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de $E$**

1. **Il existe une $n$-forme alternée et une seule $d$ vérifiant $d(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$.**
2. **Pour tout forme $n$-linéaire alternée $f$ on a : $f = f(e_1, e_2, ..., e_n)d$.**

**Remarque :** Si une forme $n$-linéaire alternée définie sur $E^n$ ($n = \dim E$), prend une valeur non nulle pour une base, elle prend une valeur non nulle pour toute base de $E$. En particulier si $B$ et $B'$ sont deux bases de $E$, alors $\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in E^n$,

$$\det_{B'}(x_1, x_2, ..., x_n) = \det_{B'}(B) \det_{B}(x_1, x_2, ..., x_n).$$

C'est la formule de changement de bases.

# 3 Déterminants

## 3.1 Définition d'un déterminant

**Définition 3.1** *Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ sur $\mathbb{K}$ rapporté à une base de $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, il existe une et une seule forme $n$-linéaire alternée définie sur $E$ et prenant la valeur 1 pour $(e_1, e_2, ..., e_n)$. Sa valeur pour $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est appelée déterminant de $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dans la base $\mathscr{B}$, on la note $\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, ..., x_n)$.*

Soient $x_1$, $x_2$,...,$x_n$ $n$ vecteurs d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$. Étant donné une base $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de $E$. Posons

$$1 \le j \le n, \quad x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i.$$

Nous avons donc :

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} a_{\sigma(1)1} ... a_{\sigma(i)i} ... a_{\sigma(n)n}$$

et l'on écrit sous la forme :

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_n1 & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

## 3.2 Déterminant d'une matrice carrée $A$ d'ordre $n$ sur $\mathbb{K}$

**Définition 3.2** *Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.On appelle le déterminant de $A$, et on note $\det A$, le réel :*

$$\sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} ... a_{\sigma(i)i} ... a_{\sigma(n)n}$$

*On le note $\det A$.*

Donc le déterminant d'une matrice $A$ est le déterminant de ces $n$ vecteurs colonnes, vecteurs de $\mathbb{K}^n$ rapporté à sa base canonique $\mathscr{B}$.
Si on considère $A$ comme matrice d'un endomorphisme de $f$ on a :

$$A = M(f, \mathscr{B}) = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$$

avec

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

d'où :

$$\det A = \det M(f, \mathscr{B}) = \det_B(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$$

en particulier quelle que soit la base $\mathscr{B}$, on a :

$$\det I_n = \det_{\mathscr{B}}(e_1, e_2, ..., e_n) = 1.$$

**Exemples :**

1. **Déterminant d'ordre 1 :**

$$\det_{\mathscr{B}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_21 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

   puisque la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est paire et la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ impaire.

2. **Déterminant d'ordre 3 :** On sait que parmi les $3! = 6$ permutations de $S_3$ il y en a 3 qui ont paires :

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

et 3 qui sont impaires :

$$\begin{pmatrix}1&2&2\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

d'où :

$$\det_{\mathscr{B}}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}-(a_{11}a_{23}a_{32}+a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}).$$

**Proposition 3.1** **Si $A$ est une matrice triangulaire supérieure alors**

$$\det A = a_{11}a_{22}...a_{nn}.$$

**Démonstration :** Pour toute permutation $\sigma$ autre que l'identité, il existe $i \in [1,b]$ tel que $\sigma(i) > i$ ; on a alors $a_{\sigma(i)i} = 0$ et par conséquent $a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}...a_{\sigma(n)n} = 0$. Il en résulte :

$$\det A = a_{11}a_{22}...a_{nn}.$$

□

**Remarque :** De même , le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure est égal au produit des ses éléments diagonaux.

## 3.3 Déterminant d'un endomorphisme

**Théorème et définition 3.1** **Si $f$ est un endomorphisme de $E$, il existe un unique scalaire $\lambda$, appelé déterminant de $f$, tel que pour toute base de $E$ et pour toute $(x_1,x_2,...,x_n)\in E^n$, on ait :**

$$\det_{\mathscr{B}}(f(x_1),f(x_2),...,f(x_n)) = \lambda \det_B(x_1,x_2,...,x_n).$$

**Le déterminant de $f$ se note $\det(f)$ et, pour toute base $\mathscr{B}$ de $E$,**

$$\det f = \det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B})).$$

**Démonstration :** Si $\lambda$ existe et $\mathscr{B} = \{e_1,e_2,...,e_n\}$ une base de $E$, alors en particulier pour $(x_1,x_2,...,x_n) = (e_1,e_2,...,e_n)$, on obtient :

$$\lambda = \det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B}))$$

ce qui entraîne l'unicité.
Soit maintenant $B_0$ une base fixe de $E$, l'application :

$$g : (x_1,x_2,...,x_n) \longrightarrow \det_{B_0}(f(x_1),f(x_2),...,f(x_n))$$

est une forme $n$-linéaire alternée ; elle existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$g = \lambda \det_{B_0}$$

C'est-à-dire :

$$(1)\quad \forall (x_1,x_2,...,x_n)\in E^n,\ \det_{B_0}(f(x_1),f(x_2),...,f(x_n)) = \lambda \det_B(x_1,x_2,...,x_n)$$

Soit $B$ une autre base de $E$. La forme $n$-linéaire $\det_B$ est proportionnelle à $\det_{B_0}$ et donc il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\det_B = \alpha \det_{B_0}$. Donc (1) entraîne, en multipliant par $\alpha$, pour tout $(x_1,x_2,...,x_n)\in E^n$ :

$$\det_{B_0}(f(x_1),f(x_2),...,f(x_n)) = \lambda \det_B(x_1,x_2,...,x_n)$$

□

## 3.4 Premières propriétés des déterminants

**Proposition 3.2** **Pour toute matrice de $M_n(\mathbb{K})$, on a : $\det {}^t A = \det A$.**

**Démonstration :** Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice, alors ${}^tA = (a'_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ avec $a'_{ij} = a_{ji}$.
Par définition :

$$\det {}^t A = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)a'_{\sigma(1)1}\ldots a'_{\sigma(i)i}\ldots a'_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}\ldots a_{i\sigma(i)}\ldots a_{n\sigma(n)}$$

D'autre part, on a :

$$\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}\ldots a_{i\sigma(i)}\ldots a_{n\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma)a_{\sigma^{-1}(1)}\ldots a_{\sigma^{-1}(i)i}\ldots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

Posons $\tau = \sigma^{-1}$. Nous savons que $\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\sigma)$ et que l'application $\sigma \longrightarrow \sigma^{-1}$ est une bijection, donc il est équivalent de sommer sur toutes les permutations $\sigma$ ou sur toutes les permutations $\tau$. On obtient donc :

$$\det {}^t A = \sum_{\tau\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\tau)a_{\tau(1)1}\ldots a_{\tau(i)i}\ldots a_{\tau(n)n} = \det A$$

□

**Proposition 3.3** **Pour toutes matrices $A$ et $B$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout scalaire $\lambda$ de $\mathbb{K}$, on a :**

$$\det AB = \det A \det B.$$

**Démonstration :** Considérons deux matrices $A$ et $B$ et soient $f$ et $g$ les deux endomorphismes associés respectivement à $A$ et $B$ dans une base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de $E$.
Considérons l'application de $E^n$ dans $\mathbb{K}^n$, définie par :

$$(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \longrightarrow \det_{\mathcal{B}}(g(x_1), \ldots, g(x_i), \ldots, g(x_n))$$

elle est $n$-linéaire, d'autre part elle est alternée car $x_i = x_j$ entraîne $g(x_i) = g(x_j)$. Cette application est donc est une forme $n$-linéaire alternée de $E^n$.
D'après le théorème fondamental, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\det_{\mathcal{B}}(g(x_1), \ldots, g(x_i), \ldots, g(x_n)) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

Nous aurons en prenant $x_i = e_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$\det_{\mathcal{B}}(g(e_1), \ldots, g(e_i), \ldots, g(e_n)) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_n) = \lambda$$

Prenons maintenant $x_i = f(e_i)$, pour $i = 1, 2, \ldots, n$ ; nous obtenons :

$$\det_{\mathcal{B}}((g\circ f)(e_1), \ldots, (g\circ f)(e_i), \ldots, (g\circ f)(e_n)) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_i), \ldots, f(e_n))$$

d'où :

$$\det_{\mathcal{B}}((g\circ f)(e_1), \ldots, (g\circ f)(e_i), \ldots, (g\circ f)(e_n)) = \det_{\mathcal{B}}(g(e_1), \ldots, g(e_i), \ldots, g(e_n)) \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_i), \ldots, f(e_n))$$

d'où enfin :

$$\det_{\mathcal{B}}(g\circ f) = \det_{\mathcal{B}}(g).\det_{\mathcal{B}}(f)$$

c'est-à-dire

$$\det BA = \det B \det A.$$

□

**Remarques :**

1. Comme $\mathbb{K}$ est commutatif et $\det {}^tA = \det A$, alors
$$\det(BA) = \det(AB) = \det({}^tBA) = \det(B\,{}^tA) = \det({}^tA\,{}^tB).$$
2. Si $A$ est inversible, alors $AA^{-1} = I_n$ entraîne $\det A^{-1} \det A = 1$, donc $\det A \neq 0$ et
$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$
3. Soit $A$ et $B$ deux matrices carrées semblables d'ordre $n$, il existe une matrice $P$ inversible telle que
$$B = P^{-1}AB$$
d'où :
$$\det B = \det P^{-1} \det A \det P = (\det P)^{-1} \det A (\det P) = \det A$$

Soit $A$ une matrice telle que $\det A \neq 0$, soit $f$ un endomorphisme associé à $E$ dans une base $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, donc
$$\det A = \det_{\mathscr{B}}(f(e_1), ..., f(e_i), ..., f(e_n)) \neq 0$$
les $n$ vecteurs $f(e_i)$ sont donc linéairement indépendants, donc $f$ est inversible et par suite $A$ aussi est inversible, d'où les résultats :

**Théorème 3.1** **$f$ étant un endomorphisme de $E$ de dimension $n$ sur $\mathbb{K}$, $\mathscr{B}$ une base de $E$, les propriétés suivantes sont équivalentes :**

1. **$f$ est injective.**
2. **$f$ est surjective.**
3. **$f$ est bijective.**
4. **$A = \mathscr{M}(f, \mathscr{B})$ est inversible.**
5. **$\det A \neq 0$.**

# 4 Calcul pratique d'un déterminant et applications

## 4.1 Opérations élémentaires sur les les lignes ou les colonnes

Soit $A$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ; $\det A$ est le déterminant dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{K}^n$ des vecteurs colonnes de $A$. L'application $\det_{\mathscr{B}}$ étant $n$-linéaire alternée, donc :

1. L'échange de deux colonnes change le signe du déterminant. Plus généralement, toute permutation $\sigma$ de $S_n$ sur les colonnes transforme $\det A$ en $\varepsilon(\sigma)\det A$.
2. La multiplication d'une colonne par un scalaire $\lambda$ non nul multiplie le déterminant par $\lambda$.
3. L'addition dans une colonne d'une combinaison linéaire des autres colonnes ne change pas le déterminant.
4. Un déterminant est nul :
   (a) si une colonne est nul ;
   (b) si deux colonnes de numéros différents sont égales ou plus généralement proportionnelles ;
   (c) si les colonnes forment une famille liée.

Comme $\det {}^tA = \det A$, les mêmes propriétés sont applicables aux lignes de $A$, qui sont les colonnes de ${}^tA$.

**Exemple :** Calculons le déterminant $\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$$\begin{array}{r} L_1 \longleftarrow L_1 \\ L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \quad \triangle = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{r} L_1 \longleftarrow L_1 \\ L_2 \longleftarrow L_2 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_2 \end{array} \quad \triangle = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

La dernière matrice étant triangulaire supérieure, d'où

$$\triangle = -11.$$

## 4.2 Développement d'un déterminant par rapport aux éléments d'une colonne (ou d'une ligne)

### 4.2.1 Cofacteurs et mineurs

**Définition 4.1** *Étant donné une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle :*
• *mineur de $a_{ij}$ le déterminant $\triangle_{ij}$ de la matrice extraite de $A$ obtenue en supprimant la $i^{\text{ième}}$ linge et $l$ième colonne de $A$,*
• *cofacteur de $a_{ij}$ le scalaire $(-1)^{i+j}\triangle_{ij}$.*

**Lemme 4.1** **Soit $A$ est une matrice carrée, d'ordre $n$ $(n \geq 2)$, de la forme :**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**alors** $\det A = a_{nn} \det A'$ **avec** $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$.

**Démonstration :** On a par définition du déterminant d'une matrice :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(i)i} \ldots a_{\sigma(n)n}$$

et comme par hypothèse :

$$\forall \sigma \in \mathscr{S}_n, \quad \sigma(n) \neq n \Longrightarrow a_{\sigma(n)n} = 0$$

donc la relation précédente s'écrit :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n, \sigma(n)=n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(i)i} \ldots a_{\sigma(n-1)n-1} a_{nn}$$

Or la restriction à $[1, n-1]$ de toute permutation $\sigma$ vérifiant $\sigma(n) = n$ est une permutation de $[1, n-1]$ et inversement toute permutation $\varrho$ de $[1, n-1]$ est prolongeable par $\varrho(n) = n$, on obtient alors une permutation de $\mathscr{S}_n$. De plus, on a $\varepsilon(\varrho) = \varepsilon(\sigma)$ puisqu'une décomposition de $\varrho$ en produit de $k$ transpositions donne également une décomposition de $\sigma$ en $k$ transpositions. On a alors :

$$\det A = a_{nn} \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_{n-1}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(i)i} \ldots a_{\sigma(n-1)n-1} = a_{nn} \det A'$$

**Théorème 4.1** **Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors on a :**

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-)^{i+j} \triangle_{ij}.$$

**Démonstration :** Désignons par les $C_i$, $i = 1,2,...,n$ les colonnes de $A$ dans une base $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Donc pour tout $j = 1,2,...,n$, on a : $C_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$, donc :

$$\begin{aligned} \det A &= \det_B(C_1, ..., C_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i, C_{j+1}, ... C_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det_B(C_1, ..., C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, ... C_n) \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \det_B(C_1, ..., C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, ... C_n) \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & 0 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

On peut opérer sur $D_{ij}$ une suite de $n-j$ échanges de colonnes pour amener la $j^{ième}$ en dernière position, puis une suite de $n-i$ échanges de lignes pour amener la $i^{ième}$ en dernière position. Le déterminant est alors multiplié par $(-1)^{n-j}(-1)^{n-i} = (-1)^{i+j}$ et l'on a :

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} & 1 \end{vmatrix}$$

Ce qui implique, d'après le lemme précédent :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \triangle_{ij}.$$

□

### 4.2.2 Comatrice

**Définition 4.2** *Étant donné une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle comatrice de $A$, notée $Com(A)$, la matrice des cofateurs de $A$, c'est-à-dire la matrice $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $b_{ij}$ est le cofacteur de $a_{ij}$ dans $A$.*

**Proposition 4.1** **Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors on a :**

$$A.{}^t Com(A) = {}^t Com(A).A = (\det A) I_n.$$

**Démonstration :** Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre $n$ ; désignons par $C_1, C_2, ..., C_n$ ses vecteurs colonnes et $b_{ij}$ le cofacteur de $a_{ij}$ dans le développement de $\det A$.
Considérons les sommes :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$$

□

1. Si $i = j$, on a déjà vu que $c_{ii} = \det A$.
2. Si $i \neq j$, $c_{ij}$ est le développement d'un déterminant d'ordre $n$ par rapport à la colonne $i$, la colonne d'indice $k \neq i$ étant $C_k$ et la colonne d'indice $i$ étant $C_j$, ce déterminant a donc deux colonnes identiques, celle d'indice $j$ et celle d'indice $i$, donc il est nul, nous aurons donc :

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} = \delta_{ij}\det A \ (\delta_{ij} \text{ symbole de KRONECKER})$$

En posant $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le n}$, qui n'est autre que la transposée de la comatrice de $A$, nous obtenons donc $BA = (\det A)I_n$. □

**Corollaire 4.1** **Si $A$ est une matrice inversible, alors son inverse est donné par :**

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}.{}^tCom(A).$$

**Exemple :** Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, la comatrice de $A$ est $\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11}\end{pmatrix}$. Dons si $A$ est inversible, alors on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}.$$

**Remarque :** En pratique, on préfère résoudre un système d'équations ou procéder par opérations élémentaires pour inverser une matrice au lieu d'utiliser la formule précédente, à l'exception des matrices carrées d'ordre 2.

### 4.2.3 Formules de CRAMER

**Proposition 4.2** **Si $(S) : AX = B$ est un système de CRAMER, l'unique solution de $(S)$ est le $n$-uplet $(x_1, x_2, ..., x_n)$ tel que :**

$$\forall i \in [1, n], \quad x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

**où $A_i$ est la matrice obtenue à partir de $A$ en remplaçant sa $i^e$ colonne par $B$.**

**Démonstration :** Le système $(S)$ est équivalent à

$$\sum_{j=1}^{n} x_jC_j = B$$

où les $C_j$ désignent les colonnes de $A$, ce qui implique :

$$\det(C_1, ..., C_{i-1}, B, C_{i+1}, ..., C_n) = \sum_{j=1}^{n} \det(C_1, ..., C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, ..., C_n)$$

Comme $\det(C_1, ..., C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, ..., C_n)$ est nul dès que $i \neq j$, alors on obtient :

$$\forall i \in [1, n], \ \det A_i = x_i \det A.$$

□

**Remarque :** En pratique, ces formules ne sont pas utilisables sauf pour $n = 2$ ou dans des cas particuliers très simples où l'on sait calculer facilement les déterminants $\det A$ et $\det A_i$.

### 4.3 Détermination du rang d'une matrice

Soit $S$ une famille de vecteurs de $E$, représentée dans une base $B$ par une matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de $S$ est le plus petit entier $r$ tel qu'il existe une sous-famille libre de $r$ élément de $S$.
Par conséquent, c'est le plus grand entier $r$ tel qu'il existe un déterminant d'ordre $r$ non nul extrait de $A$.

**Exemple :** Soit à déterminer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Il existe une déterminant extrait d'ordre 2 non nul, par exemple $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ donc $rg(A) \geq 2$. Tout les déterminants extraits d'ordre 3 sont nuls.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Donc $rg(A) = 2$.

••••••••••