Chapitre 19
INTÉGRALE SUR UN SEGMENT

Mohamed TARQI

Table des matières

••••••••••

Dans ce chapitre, on considère un intervalle $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$, avec $a < b$.

1 Fonctions continues par morceaux

1.1 Subdivision d'un intervalle

Définition 1.1 *On appelle subdivision (ou partage) de $[a,b]$ toute famille finie strictement croissante $\sigma = (a_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et*

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b.$$

Remarque : La donnée d'une subdivision de $[a,b]$ elle équivalent à la donnée d'une famille finie d'éléments deux à deux distincts de $[a,b]$.

Définition 1.2 *Soit $\sigma = (a_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$ une subdivision de $[a,b]$. On appelle pas ou module de σ le réel :*

$$\delta(\sigma) = \sup_{j\in[\![1,n]\!]} (a_j - a_{j-1}).$$

Exemple : Soit $[a,b]$ et $n \in \mathbb{N}$, la famille $\sigma = (a)_{j\in[\![0,n]\!]}$ définie par $a_j = a + j\frac{b-a}{n}$ pour $j \in [\![0,n]\!]$ est une subdivision de $[a,b]$, son pas est $\frac{b-a}{n}$: On dit la subdivision est régulière.

Proposition 1.1 *Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a,b]$. Alors $\sigma \cup \sigma'$ et $\sigma \cap \sigma'$ sont des subdivision de $[a,b]$.*

Démonstration :

1. $\sigma \cup \sigma'$ s'obtient en ordonnant la liste réunissant les points de σ et σ'.
2. $\sigma \cap \sigma'$ s'obtient en ordonnant la liste des points communs de σ et σ'.

□

Définition 1.3 *Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a,b]$. On dit que σ' est plus fine que σ si $\sigma \subset \sigma'$.*

1.2 Fonctions continues par morceaux. Fonctions en escalier

Définition 1.4 *Une fonction f est dit continue par morceaux sur $[a,b]$ si elle n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité ou elle admet des limites à droite et à gauche finies.*
Autrement dit, il existe $\sigma = (a_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$ une subdivision de $[a,b]$, avec f prolongeable par continuité sur $[a_{j-1}, a_j]$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$.
Une telle subdivision est dite adaptée à f.

Exemples

1. $x \longrightarrow E(x)$ (partie entière de x) est une fonction continue par morceaux sur tout intervalle $[a,b]$.
2. La fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x < \frac{1}{3} \\ 2 & \text{si } x = \frac{1}{3} \\ \frac{2}{2x+1} & \text{si } \frac{1}{3} \le x \le 1 \end{cases}$$

Proposition 1.2 *Toute fonction f, continue par morceaux sur $[a,b]$, est bornée.*

Démonstration : Soit $\sigma = (a_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$ une subdivision adaptée à f, alors la restriction de f à chaque intervalle $]a_{j-1}, a_j[$ est prolongeable par continuité, donc est bornée. □

Proposition 1.3 *L'ensemble $\mathscr{M}([a,b],\mathbb{R})$, des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$, muni de la'addition, de la multiplication et de la multiplication par un scalaire est un sous-algèbre de l'algèbre des fonctions bornées sur $[a,b]$.*

Démonstration : L'élément unité c'est la fonction constante égale à 1 et est dans $\mathscr{M}([a,b],\mathbb{R})$.
Soient f et g dans $\mathscr{M}([a,b],\mathbb{R})$, si σ et σ' les subdivisions associées respectivement à f et à g, alors $\sigma\cup\sigma'$ est une subdivision associée à f et g, avec cette subdivision on vérifie que $f+g$, fg et λf, avec $\lambda\in\mathbb{R}$, sont continues par morceaux.

Définition 1.5 *Une fonction φ est dite en escalier sur $[a,b]$, si elle est constante par morceaux. Plus précisément, il existe une subdivision $\sigma = (a_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$ telle que φ soit constante sur chacun des intervalles $]a_{j-1}, a_j[$, pour tout $j\in[\![1,n]\!]$.*

On montre facilement le résultat suivant :

Proposition 1.4 *L'ensemble $\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions en escalier sur un intervalle $[a,b]$ à une structure d'algèbre.*

1.3 Approximation par de fonctions en escalier

Théorème 1.1 *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$, pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe deux fonctions φ et ψ en escalier sur $[a,b]$, telles que :*

$$\varphi \le f \le \psi \text{ et } \psi - \varphi \le \varepsilon$$

Démonstration : Soit $\varepsilon>0$, comme la fonction f est uniformément continue sur $[a,b]$, implique l'existence de $\alpha>0$ tel que

$$\forall (x,y)\in[a,b]^2,\ \ |x-y|<\alpha \Longrightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{n}\le\alpha$ et soit la subdivision :

$$\sigma_n = (a_j)_{0\le j\le n} \text{ définie par } a_j = a + \frac{b-a}{n} j$$

Sur chaque intervalle $[a_{j-1}, a_j]$, pour $1\le j\le n$, la fonction f continue, donc est bornée et atteint sa borne inférieure et sa borne supérieure en x_j et y_j respectivement.
Notons $m_j = f(x_j)$ et $M_j = f(y_j)$, il est clair que $M_j - m_j \le \varepsilon$. Soit φ_n et ψ_n les deux fonctions en escaliers définies sur $[a,b]$ par :

$$\forall j\in[1,n], \forall x\in[a_{j-1}, a_j[, \varphi_n(x) = m_j, \psi_n(x) = M_j \text{ et } \varphi_n(b) = \psi_n(b) = f(b).$$

pour tout $j\in[1,n]$ et pour tout $x\in]a_{j-1}, a_j[$, on a $m_j\le f(x)\le M_j$ et par conséquent $\varphi_n\le f\le\psi_n\le$ avec $\psi_n-\varphi_n\le\varepsilon$. □

Corollaire 1.1 *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe deux fonctions en escalier φ et ψ en escalier sur $[a,b]$, telles que :*

$$\varphi \le f \le \psi \text{ et } \psi - \varphi \le \varepsilon$$

Démonstration : Soit $\varepsilon>0$ et $(a_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f. Pour $j\in[\![1,n]\!]$, la restriction de f est $]a_{j-1}, a_j[$ est continue et admet un prolongement par continuité f_j sur $[a_{j-1}, a_j]$, d'après le dernier théorème, il existe des fonctions φ_j et ψ_j sur $[a_{j-1}, a_j]$ telles que sur $[a_{j-1}, a_j]$,

$$\varphi_j \le f_j \le \psi_j \text{ et } \psi_j - \varphi_j \le \varepsilon$$

Soient maintenant les fonctions en escalier sur $[a,b]$, définies par :

1. pour tout $j\in[\![1,n]\!]$ et pour tout $x\in]a_{j-1}, a_j[$, $\varphi(x) = \varphi_j(x)$, $\psi(x) = \psi_j(x)$;
2. pour tout $j\in[\![0,n]\!]$, $\varphi(a_j) = \psi_j(a_j) = f(a_j)$.

Ces fonctions vérifient sur $[a,b]$, $\varphi\le f\le\psi$ et $\psi-\varphi\le\varepsilon$. □

Corollaire 1.2 *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors pour tout $\varepsilon>0$ il existe une fonction θ, en escalier sur $[a,b]$, telle que $|f-\theta|\le\varepsilon$.*

Démonstration : On sait qu'il existe deux fonctions en escaliers φ et ψ tels que $\varphi \le f \le \psi$ et $\psi - \varphi \le 2\varepsilon$. Donc il suffit de prendre $\theta = \frac{\varphi+\psi}{2}$. □

2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

2.1 Intégrale d'une fonction en escalier

2.1.1 Définition d'une intégrale d'une fonction en escalier

Étant donnée une fonction φ en escalier sur $[a,b]$ et $\sigma = (a_0,a_1,...,a_n)$ une subdivision associée à φ. On vérifie facilement que la somme :

$$S(\varphi,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(a_{i+1}-a_i)$$

où M_i la valeur de φ sur $]a_i,a_{i+1}[$ ne dépend que de φ, et non de la subdivision σ considérée. En effet, soit σ et σ' deux subdivisions de $[a,b]$.

1. Supposons σ' plus fine que σ, donc $\sigma' = \sigma \cup S$ où S une partie finie de $[a,b]$, donc il suffit de vérifier la propriété dans le cas où $\sigma' = \sigma \cup \{c\}$. Supposons $a_{p-1} < c < a_p$, donc :

$$\begin{aligned} S(\varphi,\sigma') &= \sum_{i=1}^{p-1}(a_i-a_{i-1})M_i + (c-a_{p-1})M_p + (a_p-c)M_p + \sum_{i=p+1}^{n}(a_i-a_{i-1})M_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})M_i \\ &= S(\varphi,\sigma) \end{aligned}$$

2. Cas général : Si σ et σ' sont deux subdivisions adaptées à φ, alors $\sigma\cup\sigma'$ est une subdivisions plus fine que σ et σ' et qui associée à φ, donc le premier cas :

$$S(\varphi,\sigma) = S(\varphi,\sigma\cup\sigma') = S(\varphi,\sigma').$$

d'où le théorème suivant :

Théorème et définition 2.1 *Soit φ une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $\sigma = (a_0,a_1,...,a_n)$ une subdivision de $[a,b]$. La somme*

$$\sum_{i=0}^{n-1} M_i(a_{i+1}-a_i)$$

où M_i la valeur de φ sur $]a_i,a_{i+1}[$ ne dépend que de φ, et non de la subdivision S considérée. Cette somme s'appelle intégrale de φ sur l'intervalle $[a,b]$ et se note $I_{ab}(\varphi)$, $\int_{[a,b]}\varphi$ ou tout simplement $I(\varphi)$.

2.1.2 Propriétés algébriques de l'intégrale des fonction en escalier

Proposition 2.1 *L'intégrale est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions en escalier. Autrement dit, pour tout couple (φ,ψ) des fonction en escalier et pour couple (α,β) de nombres réels :*

$$I(\alpha\varphi+\beta\psi) = \alpha I(\varphi) + \beta I(\psi)$$

Démonstration : Nous savons en effet qu'il existe une subdivision σ de $[a,b]$ compatible à la fois avec φ et ψ, et donc avec $\alpha\varphi+\beta\psi$. Soient M_i et N_i les valeurs de φ et de ψ sur les intervalles $]a_{i-1},a_i[$. Alors

$$\begin{aligned} I(\alpha\varphi+\beta\psi) &= \sum_{i=0}^{i=n-1}(\alpha M_i+\beta N_i)(c_{i+1}-c_i) \\ &= \alpha\sum_{i=0}^{i=n-1} M_i(c_{i+1}-c_i) + \beta\sum_{i=0}^{i=n-1} N_i(c_{i+1}-c_i) \\ &= \alpha I(\varphi)+\beta I(\psi) \end{aligned}$$

ce qu'il fallait prouver. □

2.1.3 Propriétés liées à l'ordre

Proposition 2.2 *Si φ en escalier et positive sur $[a,b]$, alors $I(\varphi)\geq 0$. En particulier si φ et ψ sont deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ telles que $\varphi\leq\psi$, alors $I(\varphi)\leq I(\psi)$.*

Démonstration : En effet, si $\varphi\geq 0$, alors $\forall i$, $M_i\geq 0$ et par conséquent la somme : $\sum\limits_{i=0}^{i=n-1} M_i(c_{i+1}-c_i)$ est positive, donc $I(\varphi)\geq 0$.
Si $\varphi\leq\psi$, alors $\psi-\varphi\geq 0$ et d'après ce qui précède $I(\psi-\varphi)\geq 0$ et par linéarité $I(\psi)-I(\phi)\geq 0$ ou encore $I(\psi)\geq I(\phi)$ □

Remarque : Si φ en escalier, bornée sur $[a,b]$ telles que : $m\leq\varphi\leq M$, alors $m(b-a)\leq I(\varphi)\leq M(b-a)$.
Le nombre $\frac{1}{b-a}I(\varphi)$ s'appelle valeur moyenne de φ sur l'intervalle $[a,b]$. Ainsi la valeur moyenne de φ appartient à l'intervalle $[m,M]$.

Théorème 2.1 *Soit φ une fonction en escalier $[a,b]$, alors $|I_{ab}(\varphi)|\leq I_{ab}(|\varphi|)$.*

Démonstration : Soit φ une fonction en escalier sur $[a,b]$, notons :
- φ^+ la partie positive de φ, c'est-à-dire $\sup(\varphi,0)$;
- φ^- la partie négative de φ, c'est-à-dire $\sup(-\varphi,0)$.

Soit enfin $|\varphi|$ la valeur absolue de φ, c'est-à-dire la fonction $x\longrightarrow|\varphi(x)|$.
D'après les définitions, on a :
- Si $\varphi(x)\geq 0$, $\varphi^+(x)=\varphi(x)$, $\varphi^-(x)=0$, et $|\varphi(x)|=\varphi(x)$
- Si $\varphi(x)\leq 0$, $\varphi^+(x)=0$, $\varphi^-(x)=-\varphi(x)$, et $|\varphi(x)|=-\varphi(x)$

Il est clair que :

$$\varphi=\varphi^+-\varphi^- \text{ et } |\varphi|=\varphi^++\varphi^-$$

et par suite :

$$I(\varphi)=I(\varphi^+)-I(\varphi^-) \text{ et } I(|\varphi|)=I(\varphi^+)+I(\varphi^-)$$

Il en découle que

$$|I(\varphi)|=|I(\varphi^+)-I(\varphi^-)|\leq I(\varphi^+)+I(\varphi^-)=I(\varphi^++\varphi^-)=I(|\varphi|).$$

D'où le résultat : □

2.1.4 Propriétés liées à l'intervalle d'intégration

Soit φ une fonction en escalier sur $[a,b]$ et c un point de $]a,b[$. Nous pouvons considérer une subdivision de $[a,b]$ compatible avec φ et contenant le point c. Dans ce cas il existe n_0 tel que $n_0=c$ et on a :

$$\begin{aligned} I_{ab}(\varphi) &= \sum_{i=0}^{i=n-1} M_i(c_{i+1}-c_i) \\ &= \sum_{i=0}^{i=n_01} M_i(c_{i+1}-c_i)+\sum_{i=n_0}^{i=n-1} M_i(c_{i+1}-c_i) \\ &= I_{ac}(\varphi)+I_{cb}(\varphi) \end{aligned}$$

Proposition 2.3 *(**Relation de** CHASLES) Soit φ une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $c\in]a,b[$, alors on a :*

$$I_{ab}(\varphi)=I_{ac}(\varphi)+I_{cb}(\varphi) \quad (1)$$

On pose par convention : $I_{ba}(\varphi)=-I_{ab}(\varphi)$ et $I_{aa}(\varphi)=0$.
Avec cette convention, on voit que la relation (1) reste valable quelles que soient les positions relatives des points a, b et c : c'est la relation de CHASLES.

2.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit f une fonction continue par morceau sur $I=[a,b]$, considérons les ensembles :

$$E^-(f)=\{\int_I\varphi/\varphi\in\mathscr{E}(I,\mathbb{R}),\ \ \varphi\leq f\}$$

$$E^+(f)=\{\int_I\psi/\psi\in\mathscr{E}(I,\mathbb{R}),\ \ \psi\geq f\}$$

Proposition 2.4 *Les deux ensembles $E^+(f)$ et $E^-(f)$ sont respectivement minoré et majoré, et $\sup E^-(f)=\inf E^+(f)$.*

Démonstration : f étant continue par morceaux, elle donc bornée. Si M et m sont respectivement un majorant et un minorant de f sur I, alors les deux fonctions constantes m et M encadrent f ; donc $E^-(f)$ et $E^+(f)$ sont non vides.
Pour tout $\varphi \in \mathscr{E}(I,\mathbb{R})$ tel que $\varphi \le f$, on a $\int_I \varphi \le (b-a)M$, et pour tout $\psi \in \mathscr{E}(I,\mathbb{R})$ tel que $\psi \ge f$, on a $\int_I \varphi \ge (b-a)m$. Donc $E^-(f)$ est une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$, elle admet donc une borne supérieure et de même $E^+(f)$ admet une borne inférieure, puisqu'elle est non vide et minorée de $\mathbb{R}$.
Pour toutes fonctions en escaliers sur $[a,b]$ telles que $\varphi \le f \le \psi$, on a : $\int_I \varphi \le \int_I \psi$. Ce qui implique $\sup E^-(f) \le \inf E^+(f)$.
Soit maintenant $\varepsilon > 0$, il existe φ et ψ deux fonctions en escaliers sur I telles que $\varphi \le f \le \psi$ et $\psi - \varphi \le \varepsilon$. Il en résulte alors

$$\int_I \varphi \le \sup E^-(f) \le \inf E^+(f) \le \int_I \psi \text{ et } \int_I (\psi - \varphi) \le (b-a)\varepsilon$$

d'où $\inf E^+(f) - \sup E^-(f) \le (b-a)\varepsilon$. On a donc $\inf E^+(f) - \sup E^-(f) \le 0$, et en conclusion : $\inf E^+(f) - \inf E^-(f) = 0$. □

Remarque : Si f est en escalier, alors $\inf E^+(f) = \sup E^-(f) = \int_I f$.

Définition 2.1 *Avec les notations précédentes, la borne commune des ensembles $E^-(f)$ et $E^+(f)$ est appelée intégrale de f sur I et on la note :*

$$\int_I f \text{ ou } \int_I f(x)dx.$$

Remarque : Soit f une fonction continue par morceaux sur I, alors elle est bornée sur $[a,b]$ telle que : $m \le f \le M$, d'où $m(b-a) \le \int_I f \le M(b-a)$.
Le nombre $\frac{1}{b-a}\int_I f$ s'appelle valeur moyenne de φ sur l'intervalle $[a,b]$. Ainsi la valeur moyenne de f appartient à l'intervalle $[m,M]$.

2.3 Propriétés de l'intégrale

2.3.1 Linéarité, relation de CHASLES

Proposition 2.5 *L'intégrale est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur* $[a,b]$.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$, f étant continue par morceaux sur I, donc il existe θ en escalier sur I telle que $|f-\theta| \le \varepsilon$, on a $\theta - \varepsilon \le f \le \vartheta + \varepsilon$, ce qui prouve :

$$\int_I (\theta - \varepsilon) \le \int_I f \le \int_I (\theta + \varepsilon)$$

et donc :

$$\left|\int_I f - \int_I \theta\right| \le (b-a)\varepsilon.$$

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I, ainsi λ et μ deux scalaires, il existe alors, d'après la première partie, φ et ψ deux fonctions en escaliers sur I telles que

$$|f-\varphi| \le \varepsilon, \quad \left|\int_I f - \int_I \varphi\right| \le (b-a)\varepsilon$$

et

$$|g-\psi| \le \varepsilon, \quad \left|\int_I g - \int_I \psi\right| \le (b-a)\varepsilon.$$

Posons $h = \lambda f + \mu g$ et $\theta = \lambda\varphi + \mu\psi$, on a :

$$\begin{aligned} |h-\theta| &\le |\lambda||f-\varphi| + |\lambda||g-\psi| \\ &\le (|\lambda| + |\mu|)\varepsilon \end{aligned}$$

et par suite :

$$\left|\int_I h - \int_I \theta\right| \le (b-a)(|\lambda| + |\mu|)\varepsilon$$

La linéarité de l'intégrale sur $\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$ permet aussi d'écrire :

$$S = \int_I (\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda \int_I \varphi + \mu \int_I \psi$$

ce qui donne :

$$\left|\lambda \int_I f + \mu \int_I g - S\right| \le (b-a)(|\lambda| + |\mu|)\varepsilon$$

et donc :

$$\begin{aligned}\delta &= \left|\int_I h - \lambda\int_I f - \mu\int_I g\right| \\ &= \left|\int_I h - S + S + \lambda\int_I f - \mu\int_I g\right| \\ &\leq \left|\int_I h - S\right| + \left|S - \lambda\int_I f - \mu\int_I g\right| \\ &\leq 2(b-a)(|\lambda|+|\mu|)\varepsilon\end{aligned}$$

On en déduit : $\forall\varepsilon>0,\ \delta\leq 2(b-a)(|\lambda|+|\mu|)\varepsilon$, ce qui prouve que $\delta=0$ et donc

$$\int_I(\lambda f+\mu g)=\lambda\int_I f+\mu\int_I g.$$

□

Proposition 2.6 *Soit $c\in]a,b[$ et f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, alors*

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

Démonstration : Soit φ une fonction en escalier qui minore f, on a :

$$\int_{[a,b]}\varphi = \int_{[a,c]}\varphi + \int_{[c,b]}\varphi \leq \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

le réel $\int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$ qui est un majorant de l'ensemble :

$$\left\{\int_{[a,b]}\varphi / \varphi\in E^-(f)\right\}$$

est donc plus grand que la borne supérieure de ce dernier, ce qui donne :

$$\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

En appliquant ce résultat à $-f$, on obtient :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

□

Remarque : Soit une fonction f continue par morceaux sur $[a,b]$ et $n\in\mathbb{N}$, $\{a_0,a_1,...,a_n\}$ une subdivision de $[a,b]$, alors :

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{[a_k,a_{k+1}]} f.$$

2.3.2 Croissance. Inégalités

Proposition 2.7 *L'application $\int_I : f \longrightarrow \int_I f$ est croissante sur $\mathscr{M}(I,\mathbb{R})$:*

$$f\leq g \Longrightarrow \int_I f \leq \int_I g$$

en particulier si $f\geq 0$, alors $\int_I f\geq 0$.

Démonstration : Soit f une fonction en escalier et positive sur $[a,b]$, la fonction nulle est en escalier sur $[a,b]$ et elle minore f, donc $0\in E^-(f)$, donc $\int_I f\geq 0$.
Si $f\leq g$ alors $g-f\geq 0$ et $\int_I(g-f)=\int_I g-\int_I f\geq 0$. □

Corollaire 2.1 *Pour toute fonction en escalier sur $I=[a,b]$, on a :*

$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|.$$

Démonstration : En effet, on a : $-|f| \leq f \leq |f|$, donc $-\int_I |f| \leq \int_I f \leq \int_I |f|$. □

Proposition 2.8 *Si f et g sont des fonctions réelles continues par morceaux sur $I = [a,b]$, alors $\left|\int_I fg\right| \leq \sup\limits_I |f| \int_I |g|$.*

Démonstration : Il suffit de remarquer : $-\sup\limits_I |g||f| \leq fg \leq \sup\limits_I |g||f|$. □

Remarque : Pour toute fonction continue par morceaux sur $I = [a,b]$, on a :

$$\left|\int_I f\right| \leq \sup_I |f|(b-a).$$

Théorème 2.2 *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un segment $[a,b]$, $(a<b)$. Alors, on a :*

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right).$$

Démonstration : Pour tout λ un réel. On a, d'une manière évidente :

$$\int_a^b (\lambda f + g)^2 = \lambda^2 \int_a^b f^2 + 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b g^2.$$

Le polynôme $\lambda \longrightarrow \int_a^b (\lambda f+g)^2 = \lambda^2 \int_a^b f^2 + 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b g^2$ est positive.

1. Si $\int_a^b f^2 \neq 0$, le polynôme est un trinôme, donc son discriminant est négatif ou nul :

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 - \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right) \leq 0.$$

2. Supposons $\int_a^b f^2 = 0$.
Si $\int_a^b fg > 0$, alors $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow +\infty} 2\left(\int_a^b fg\right)\lambda + \int_a^b g^2 = -\infty$, contradiction. De même si $\int_a^b fg < 0$, alors $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow -\infty} 2\left(\int_a^b fg\right)\lambda + \int_a^b g^2 = -\infty$, contradiction. Donc $\int_a^b fg = 0$ et l'inégalité est vraie.

□

2.4 Extension de la définition de l'intégrale

I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$

Définition 2.2 *Soit f une fonction définie sur I. On dit que f est continue par morceaux sur I lorsque sa restriction à tout segment $[a,b]$ inclus dans I est continue par morceaux sur $[a,b]$.*

Exemple : La fonction partie entière $x \longrightarrow [x]$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Définition 2.3 *Soit f une fonction continue par morceaux sur I, pour tous réels a et b de I, on pose :*

$$\int_a^b f = \begin{cases} \int_{[a,b]} f & si \quad a < b \\ 0 & si \quad a = b \\ -\int_b^a f & si \quad b < a \end{cases}$$

Remarque : La relation de CHASLES et les inégalités de la moyenne s'écrivent :

1. Pour tous réels a,b,c de I : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
2. Si $a<b$, $\left|\int_a^b fg\right| \leq \sup\limits_{[a,b]} |f| \int_a^b |g|$. En particulier $\left|\int_a^b f\right| \leq \sup\limits_{[a,b]} |f|(b-a)$.

3 Intégrale d'une fonction continue

Dans cette section I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à $\{0\}$.

3.1 Primitives d'une fonction continue

Théorème 3.1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un élément de I. la fonction : $x \longrightarrow \int_a^x f(x)dx$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I sa dérivée est f.*

Démonstration : Posons $F(x_0)=\int_a^{x_0} f(t)dt$, pour tout $h\neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}(F(x_0+h)-F(x_0)-hf(x_0) &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt-\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt \\ &= \frac{1}{h}\int_{x}^{x_0+h}[f(t)-f(x_0)]dt\end{aligned}$$

L'inégalité de la moyenne entraîne, pour $h>0$:

$$\left|\int_{x_0}^{x_0+h}[f(t)-f(x_0)]dt\right|\leq |h|\sup_{t\in[x_0,x_0+h]}|f(t)-f(x_0)|$$

et par suite

$$\left|\frac{1}{h}(F(x_0+h)-F(x_0)-hf(x_0))\right|\leq \sup_{t\in[x_0,x_0+h]}|f(t)-f(x_0)|$$

La continuité de f en x_0 entraîne $\lim\limits_{h\longrightarrow 0}\sup\limits_{t\in[x_0,x_0+h]}|f(t)-f(x_0)|=0$ ce qui implique

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}(F(x_0+h)-F(x_0))=f(x_0),$$

de même on montre que

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h}(F(x_0+h)-F(x_0))=f(x_0),$$

donc F est dérivable en x_0 et sa dérivée $F'(x_0)=f(x)$. □

Corollaire 3.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Toute fonction réelle f continue sur I admet au moins une primitive sur I.*

Démonstration : C'est une conséquence du dernier théorème. □

Remarques :

1. Pour une fonction continue sur I, la fonction $x\longrightarrow\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en a. ($a\in I$). Les autres primitives sont de la forme $x\longrightarrow\int_a^x f(t)dt+C$, $C\in\mathbb{R}$.
2. Soit F une primitive de f sur I. Pour tous a et b de I : $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$.
3. Si f est classe C^1 sur I, alors pour tous x et a de I, on a : $\int_a^b f'(x)dx=f(x)-f(a)$.

Exemple : La fonction logarithme est l'unique primitive de $x\longrightarrow\frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ s'annulant en 1 : pour tout réel x strictement positif, $\ln x=\int_1^x\frac{dt}{t}$.

3.1.1 Positivité

Théorème 3.2 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.*

1. *Si f est positive sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx\geq 0$.*
2. *Si f est positive sur $[a,b]$ et si $\int_a^b f(x)dx=0$, alors f est nulle sur $[a,b]$.*

Démonstration :

1. Si F est une primitive de f sur $[a,b]$, alors $F'=f$. f étant positive sur $[a,b]$, F est croissante sur $[a,b]$ et donc $F(b)-F(a)\geq 0$ soit $\int_a^b f(x)dx\geq 0$.
2. La condition $\int_a^b f(x)dx=0$ signifie $F(b)-F(a)=0$, or f est positive sur $[a,b]$, donc F est croissante et :

$$\forall x\in[a,b], F(a)\leq F(x)\leq F(b)$$

Puisque $F(a)=F(b)$, F est constante sur $[a,b]$. Il en résulte que sa dérivée f est nulle sur $[a,b]$

□

Remarque : Dans les cas où les fonctions f et g sont continues, l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ est une égalité si, et seulement si, f et g sont liées. En effet :

1. Supposons $\{f,g\}$ est lié. Si $f=0$, la conclusion est évidente.
   Si $f\neq 0$, alors il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $g=\alpha f$, et on a donc :
   $$\left(\int fg\right)^2=\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$$
   Réciproquement, supposons qu'il y ait égalité dans l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.
   Si $f=0$, alors $\{f,g\}$ est lié.
2. Supposons $f\neq 0$. Puisque f est continue, on a alors $\int_a^b f^2>0$, d'où :
   $$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \int_a^b(\lambda f+g)^2=\left(\int_a^b f^2\right)\left(\lambda+\frac{\int_a^b fg}{\int_a^b f^2}\right)^2$$
   En particulier, pour $\lambda=-\frac{\int_a^b fg}{\int_a^b f^2}$, donc $\int_a^b(\lambda f+g)^2=0$, puis $\lambda f+g=0$ et donc $\{f,g\}$ est lié.

3.1.2 Interprétation géométrique de l'intégrale

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan P. la donnée de ce repère fixe une unité d'aire.

Proposition 3.1 *Soit f une fonction continue et positive définie sur un intervalle $[a,b]$ $(a<b)$. Soit D_f la partie du plan P définie par : $\{M(x,y)\in P\ /\ a\leq x\leq b \text{ et } 0\leq y\leq f(x)\}$. On admet que l'aire de D_f, notée $A(D_f)$, est égale à $\int_a^b f(x)dx$.*

Application : L'aire d'un disque de rayon R, c'est :
$$2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx=\pi R^2$$

3.2 Sommes de RIEMANN

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Soit $n\in N^*$ et $\sigma=(a_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une subdivision de $[a,b]$. Un famille $(c_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, avec $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $c_k\in[a_{k-1},a_k]$, est dite associée à σ.

Définition 3.1 *La somme de RIEMANN[1] de f relative à σ et à $(c_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est :*
$$\mathscr{R}_f(\sigma,(c_i)_{i\in[\![1,n]\!]})=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})f(c_k).$$

Proposition 3.2 *Pour tout $(\varepsilon>0)$, il existe $\eta>0$ tel que, quelle que soit la subdivision σ et la famille $(c_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ associée, si la pas de σ est inférieur à η, on a :*
$$\left|\mathscr{R}_f(\sigma,(c_i)_{i\in[\![1,n]\!]})-\int_a^b f\right|\leq\varepsilon.$$
On écrit : $\lim_{|\sigma|\to 0}\mathscr{R}_f(\sigma,(c_i)_{i\in[\![1,n]\!]})=\int_a^b f$.

Démonstration : La continuité uniforme de f sur $[a,b]$ entraîne l'existence de η :
$$\forall(x,y)\in[a,b]^2,|x-y|\leq\eta\Longrightarrow|f(x)-f(y)|\leq\frac{\varepsilon}{b-a}$$
Avec la relation de CHASLES, on a :
$$\int_a^b f(t)dt=\sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k}f(t)dt$$
donc
$$\left|\mathscr{R}_f(\sigma,(c_i)_{i\in[\![1,n]\!]})-\int_a^b f\right|=\sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k}(f(c_k)-f(t))dt$$
Si on suppose $\sigma\leq\eta$, on aura $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\forall t\in[a_{k-1},a_k]$, $|c_k-t|\leq\eta$, donc
$$\left|\mathscr{R}_f(\sigma,(c_i)_{i\in[\![1,n]\!]})-\int_a^b f\right|=\sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k}(f(c_k)-f(t))dt\leq\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=\varepsilon.$$
Ainsi $|\sigma|\leq\eta\Longrightarrow\left|\mathscr{R}_f(\sigma,(c_i)_{i\in[\![1,n]\!]})-\int_a^b f\right|\leq\varepsilon$ □

1. Riemann Georg Friedrich Bernard (1826-1866), mathématicien allemand dont l'ouvre est colossale

Cas particuliers : Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$. On pose :

$$x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \ldots, x_i = a + i\frac{b-a}{n}, \ldots, x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b.$$

on a :

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

Considérons les deux suites $(s_n)_{n\geq 1}$ et $(S_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$(\forall n \geq 1),\ s_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i=n-1} f(a + i\tfrac{b-a}{n}) \text{ et } S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} f(a + i\tfrac{b-a}{n})$$

Théorème 3.3 *Les deux suites $(s_n)_{n\geq 1}$ et $(S_n)_{n\geq 1}$ sont convergentes et* $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Exemples

1. Cherchons $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{i=n} \frac{1}{n+i}$

$$\begin{aligned}(\forall n \geq 1),\quad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{n+i} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} f(1+\frac{i}{n}) \quad \text{avec} \quad f(x) = \frac{1}{1+x}\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{n+i} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} f(1+\frac{i}{n})\\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x}\\ &= \ln 2\end{aligned}$$

2. Cherchons $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sum\limits_{i=0}^{i=n-1}\frac{1}{n^2+i^2}$

$$\begin{aligned}(\forall n \geq 1),\quad n\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{n^2+i^2} &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i=n-1}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i=n-1} f(\frac{i}{n}) \quad \text{avec} \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n\sum_{i=0}^{i=n-1}\frac{1}{n^2+i^2} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i=n-1} f(\frac{i}{n})\\ &= \int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\\ &= \frac{1}{4}\pi\end{aligned}$$

4 Extension aux fonctions complexes

Dans cette section, on considère des fonctions f continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs complexes. On pose $f = u + iv$ où u et v sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de f.

4.1 Fonctions complexes continues par morceaux

Définition 4.1 *Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite continue par morceaux sur $[a,b]$ si existe une subdivision $\sigma = (a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ telle que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:*
- *f est continue sur $]a_{k-1}, a_k[$,*
- *f admet une limite à droite en a_{k-1} et une limite à gauche en a_k.*

Définition 4.2 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f continue par morceaux sur I lorsque sa restriction à chaque intervalle $[a,b]$ de I est continue par morceaux.*

Soit a_{k-1} et a_k deux points de la subdivision $\sigma = (a_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ tel que $a_{k-1} < a_k$:
- f est continue sur $]a_{k-1}, a_k[$ si, et seulement si, u et v le sont.
- f admet une limite à droite en a_{k-1} (resp. à gauche de a_k) si, et seulement si, u et v ont une limite en a_{k-1} (resp. à gauche en a_k).

D'où la caractérisation :

Proposition 4.1 *$f = u + iv$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ si, et seulement si, u et v sont continues par morceaux sur $[a,b]$.*

On aussi la propriété suivante :

Proposition 4.2 *L'ensemble $\mathcal{M}(I,\mathbb{C})$ des fonctions continues par morceaux sur I à une structure de $\mathbb{C}$-algèbre.*

4.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition 4.3 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux sur I. Pour tout segment $[a,b]$ de I, on définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ par :*

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} u + i \int_{[a,b]} v$$

et pour tout couple (a,b) de I^2, on définit $\int_a^b f$ par :

$$\int_a^b f = \int_a^b u + i \int_a^b v.$$

Remarque : $\mathrm{Re}(\int_a^b f) = \int_a^b \mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(\int_a^b f) = \int_a^b \mathrm{Im}(f)$ et $\overline{(\int_a^b f)} = \int_a^b \overline{f}$.

Proposition 4.3 *Soit f une fonction par morceaux sur $[a,b]$, alors :*

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \le \int_{[a,b]} |f|.$$

C'est-à-dire

$$\left[\left(\int_{[a,b]} u\right)^2 + \left(\int_{[a,b]} v\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \le \int_{[a,b]} (u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}$$

Démonstration : Posons $I = [a,b]$. Si $\int_I f = 0$, le résultat est vraie, sinon il existe $\theta \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\int_I f = e^{i\theta}\left|\int_I f\right|$$

donc

$$\left|\int_f (t)dt\right| = \int_I e^{-i\theta} f(t)dt$$

il vient donc ($\int_I e^{-i\theta} f(t)dt$ est un réel) :

$$\left|\int_f (t)dt\right| = \mathrm{Re}(\int_I e^{i\theta} f(t)dt) = \int_I \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f(t))dt$$

et comme $\mathrm{Re}(e^{-i\theta} f(t)) \le |f(t)|$, on déduit :

$$\left|\int_I f(t)dt\right| \le \int_I |f(t)|\,dt.$$

□

4.3 Primitives d'une fonction complexe

Théorème 4.1 *Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur un intervalle I et $a \in I$. La fonction $F : x \longrightarrow \int_a^x f(f)dt$ est dérivable sur I et sa dérivée est f, c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.*

Démonstration : On a : $F(x) = \int_a^x u(t)dt + i\int_a^x v(t)dt$ et d'après ce qu'on a vu pour les fonctions réelles, les fonctions :

$$U : x \longrightarrow \int_a^x u(t)dt \text{ et } V : x \longrightarrow \int_a^x u(t)$$

sont dérivables sur I avec $U' = u$ et $V' = v$, donc F est dérivable sur I et $F' = u + iv = f$. □

Corollaire 4.1 *Pour toute fonction complexe continue sur I et toute couple (a,b) d'éléments de I, on a :*

$$\int_a^b f(t)dt = h(b) - h(a)$$

avec h une primitive quelconque de f dans I.

Exemple : $\int_0^\pi e^{it}dt = [\frac{1}{i}e^{it}]_0^\pi = \frac{1}{i}(e^{i\pi} - 1)2i$.

5 Formules de TAYLOR

5.1 Formule de TAYLOR avec reste intégral

Proposition 5.1 *Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur I, on a :*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Démonstration : Montrons ce résultat par récurrence sur n.

1. Si $n = 0$, c'est-à-dire si f est de classe C^1, alors on a :

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)dt.$$

2. Supposons le résultat est à l'ordre $n-1$ et montons le pour n. Soit f de classe C^{n+1} sur I. Par hypothèse on peut écrire :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt.$$

Mais on a : (intégration par parties)

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt &= \left[-\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{(n)!} f^{(n+1)}(t)dt \\ &= \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{(n)!} f^{(n+1)}(t)dt\end{aligned}$$

D'où

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{(n)!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Exemple : Montrons que : $\forall x \in [-\pi, \pi], \ \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.
La formule de Taylor avec reste intégral, à l'ordre 2 s'écrit :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \sin t dt$$

Comme la fonction sinus est positive sur $[0,\pi]$ et négative sur $[-\pi, 0]$, on a :

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \sin t dt \geq 0$$

ce qui permet de conclure.

5.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Proposition 5.2 *Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur I. Si M majore $|f^{(n+1)}|$ sur le segment $[a,b]$, alors on a :*

$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right|\leq M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Démonstration : Par application de la formule de Taylor avec reste intégral, on obtient :

$$\begin{aligned}\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right| &= \left|(b-a)^{n+1}\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(a+(b-a)t)dt\right|\\ &\leq |(b-a)|^{n+1}\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}\left|f^{(n+1)}(a+(b-a)t)dt\right|dt\\ &\leq |(b-a)|^{n+1}\int_0^1 M\frac{(1-t)^n}{n!}dt\\ &= M|b-a|^{n+1}\left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^1\\ &= M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

□

Exemples :

1. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\left|\sin x-x+\frac{x^3}{6}\right|\leq\frac{x^4}{24}$. ($\forall x\in\mathbb{R},\ \ |\sin^{(4)}(x)|=|\sin(x)|\leq 1$).
2. Établissons la relation bien connue : $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x=\lim_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$. La fonction exp est classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n, implique pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\left|e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\exp^{(k)}(0)\right|\leq M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

le réel M ne dépend pas de n, c'est la borne supérieure de $t\longrightarrow\exp^{(n+1)}t$ sur la segment $[0,x]$. et comme $\lim_{n\to+\infty}M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$, alors

$$e^x=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

6 Procédés d'intégration

6.1 Intégration par parties

Proposition 6.1 *Soient u et v deux fonctions dérivables et à dérivées continues sur $[a,b]$, alors :*

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx=[u(x)v(x)]_{x=a}^{x=b}-\int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Démonstration : $\forall x\in[a,b],\ \ [u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

$$\int_a^b[u(x)v(x)]'=\int_a^b u'(x)v(x)dx+\int_a^b u(x)v'(x)dx=[u(x)v(x)]_{x=a}^{x=b}$$

d'où :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx=[u(x)v(x)]_{x=a}^{x=b}-\int_a^b u(xv'(x))dx.$$

□

Exemples :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t dt = [t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt$
   $= \frac{\pi}{2} - [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}}$
   $= \frac{\pi}{2} - 1$
2. $\int_0^x t^2 \sin t dt = [t^2(-\cos t)]_0^x - \int_0^x 2t(-\cos t)dt$
   $= x^2\cos x + 2\int_0^x t\cos t dt$
   $= x^2\cos x + 2[t\sin t]_0^x - \int_0^x \sin t dt$
   $= x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x - 1)$

6.2 Intégration par changement de variable

Proposition 6.2 *Soient f une fonction continue sur $[\alpha,\beta]$ et φ une fonction dérivable sur $[a,b]$ et à dérivée continue sur $[a,b]$ tels que $\varphi(a)=\alpha$ et $\varphi(b)=\beta$, alors :*

$$\int_a^b f\circ\varphi(t)\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

Démonstration : Soit F une primitive de f sur $[\alpha,\beta]$, on a, $\forall x\in[a,b]$:

$$(F\circ\varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

donc $F\circ\varphi$ est une primitive de la fonction $x \longrightarrow f(\varphi(x))\varphi'(x)$, d'où :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx &= [F\circ\varphi(x)]_a^b \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= F(\beta) - F(\alpha) \\ &= \int_\alpha^\beta f(t)dt.\end{aligned}$$

□

Applications :

1. Soit f une fonction numérique continue et T-périodique, a un nombre réel. On a :
   $\int_T^{a+T} f(t)dt = \int_0^a f(t)dt$
2. Soit f une fonction paire (resp. impaire) définie sur $\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}$. On a :
   $$\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt \ \ (\text{resp. } \int_{-a}^a f(t)dt = 0)$$

Exemples :

1. Calcul de $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x + 1)\sin 2x dx$
   $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x + 1)\sin 2x dx$
   $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x + 1)2\sin x\cos x dx$
   $= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^5 x + \sin x)\cos x dx$
   On pose $t = \sin x$
   donc $dt = \cos x dx$ et si $x = 0$ alors $t = 0$ et si $x = \frac{\pi}{2}$ alors $t = 1$, d'où :
   $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^5 + t)dt$
   $= 2[\frac{t^6}{6} + \frac{t^2}{2}]_0^1$
   $= \frac{4}{3}$
2. Cherchons la primitive de $x \longrightarrow \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$ sur $\mathbf{R}_+^*$ qui s'annule en 1.
   Notons F cette primitive, donc $\forall x>0,\ F(x) = \int_1^x \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}}dt$
   On pose $u = \sqrt{t}$, donc $du = \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{dt}{2u}$
   donc :

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_1^x \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}}dt \\ &= \int_1^{\sqrt{x}} \frac{2udu}{(1+u^2)u} \\ &= 2[\arctan u]_1^{\sqrt{x}} \\ &= 2\arctan\sqrt{x} - \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

6.3 Liste des primitives usuelles

Fonction f	Primitive $F = \int f$	Domaine de validité
$e^{\alpha x}\ \ (\alpha \neq 0)$	$\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$	$\ln \operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\coth x$	$\ln\lvert\operatorname{sh} x\rvert$	$\mathbb{R}^*$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+n\pi/n \in \mathbb{Z}\}$
$\cot x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$\mathbb{R}\backslash\{n\pi/n \in \mathbb{Z}\}$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1-\operatorname{th}^2 x$	$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = \cot^2 x - 1$	$-\cot x$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	$\tan x$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+n\pi/n \in \mathbb{Z}\}$
$\frac{1}{\sin^2 x} = 1+\cot^2 x$	$-\cot x$	$\mathbb{R}\backslash\{n\pi/n \in \mathbb{Z}\}$
$x^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z})$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_*^+$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$]-1,1[$
$\frac{1}{\sqrt{x^1-1}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert$	$]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

7 Primitives des fonctions $x \longrightarrow P(x)e^{\alpha x}$ où $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

Une intégration par parties donne ($\alpha \neq 0$) :

$$\int P(x)e^{\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}P(x)e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha}\int P'(x)e^{\alpha x}$$

Par itération, on déduit qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ de degré $\deg P$ tel que :

$$\int P(x)e^{\alpha x} = Q(x)e^{\alpha x} + cte.$$

Cas particulier : Pour tout nombre a (réel ou complexe) non nul, on a sur tout $\mathbb{R}$:

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + cte$$

D'où, en posant $a = \alpha + i\beta$, et en séparant les parties réelle et imaginaire :

$$\int e^{\alpha}\cos\beta x dx = \frac{\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x} + cte$$

et

$$\int e^{\alpha}\sin\beta x dx = \frac{\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x} + cte.$$

8 Primitives d'une fraction rationnelle

Pour chercher une primitive d'une fraction rationnelle, on commence d'abord par la décomposer en éléments simples. On cherche ensuite, une primitive de chacun des éléments simples. La partie entière étant un polynôme , on sait en trouver une primitive.
On distingue deux types d'éléments simples :

8.1 Éléments simples de première espèce

Sont les fractions rationnelles de la forme : $\frac{A}{(x-a)^k}$.

1. Pour tout réel $\alpha \neq 1$ et tout nombre réel ou complexe a, on a sur $\mathbb{R}$:
$\int \frac{A}{(x-a)^\alpha}dx = \frac{A}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} + cte.$
2. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$. pour $x > a$, on a :
$\int \frac{dx}{x-a} = \ln(x-a) + cte$
et pour $x < a$
$\int \frac{dx}{x-a} = \ln(-x+a) + cte$
d'où les deux cas, on a :
$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + cte$
(b) Si $a = \alpha + i\beta, \quad \beta \neq 0$, dans ce cas
$$\int \frac{1}{x-\alpha-i\beta}dx = \int \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx + i\beta \int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$
et on est ramené à chercher une primitive des éléments simples de seconde espèce et dans ce cas, on a, d'une manière générale :
Pour tout m, p, α et β $(\beta \neq 0)$ de $\mathbb{R}$,
$$\int \frac{mx+p}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = \frac{m}{2}\ln[x-\alpha)^2+\beta^2] + \frac{p+m\alpha}{\beta}\arctan\frac{x-\alpha}{\beta} + cte$$
En particulier, pour tout nombre réel $m \neq 0$, on a sur $\mathbb{R}$:
$$\int \frac{dx}{x^2+m^2} = \frac{1}{m}\arctan\frac{x}{m} + cte.$$

8.2 Éléments simples de seconde espèce

Il s'agit des intégrales des primitives de la forme : $\int \frac{ax+b}{[(x-p)^2+q^2]^n}$, où a, b, p, q sont des réels tels que $q \neq 0$, et où $n \in \mathbb{N}^*$. On commence par introduire au numérateur la différence $x-p$ du trinôme $(x-p)^2+q$ en écrivant :
$$ax+b = \frac{a}{2}(2x-2p) + b + ap$$
d'où :
$$\int \frac{ax+b}{[(x-p)^2+q^2]^n} = \frac{a}{2}\int \frac{2(x-p)dx}{[(x-p)^2+q^2]^n} + (b+ap)\int \frac{dx}{[(x-p)^2+p^2]^n}$$
La première intégrale est de la forme $\int \frac{du}{u^n}$, la seconde se calcule à l'aide de changement de changement de variable $x-p = q\tan t$.

Exemple : Calcul de $I = \int \frac{1-x}{(x^2+x+1)}dx$.
Posons $u = x^2+x+1$; $du = (2x+1)dx$; $\frac{1-x}{u^2} = \frac{1}{2}\frac{2-2x}{u^2} = \frac{1}{2}\frac{3-(1+2x)}{u^2}$, donc on a :
$$I = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{u^2} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} = J + \frac{1}{2}\frac{1}{u}.$$
avec $J = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.
Écrivons $u = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ et faisons la changement de variable défini par : $x + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\tan t$, donc
$$t = \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right), \text{ et } u = \frac{3}{4\cos^2 t}$$
et par conséquent
$$J = \frac{3}{2}\int \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{dt}{\cos^2 t}\frac{16\cos^2 t}{9} = \frac{4}{\sqrt{3}}\int \cos^2 t dt = \frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2t + C$$
La relation $\sin 2t = \frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}$ implique $\sin 2t = \frac{\sqrt{3}(2x+1)}{2(x^2+x+1)}$ et par conséquent :
$$I = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{x+1}{x^2+x+1} + C.$$

9 Primitives des fonctions rationnelle de sin et cos

Il s'agit des primitives de la forme $\int F(\sin x, \cos x)dx$ où F est une fraction rationnelle.

9.1 Méthode générale

On peut ramener cette intégrale à celle d'une fraction rationnelle d'une variable t en considérant le changement de variable défini par : $t = \tan\frac{x}{2}$. Le fait que les fonctions sin et cos sont 2π-périodiques permet de se limiter, dans la recherche des primitives sur des intervalles de longueurs 2π. Soit la changement suivant :

$$x = 2\arctan t \Longleftrightarrow t = \tan\frac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi.$$

En tenant compte des relations :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

les intégrales proposées s'écrivent sous la forme :

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Exemple : $\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \left(\frac{2dt}{1+t^2}\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\right) = \int \frac{2dt}{(1+t)^2} = \frac{-2}{1+\tan\frac{x}{2}} + cte$

9.2 Cas particuliers : Règles de Bioche

Les règles de Bioche consistent à proposer un changement de variable quand l'expression $F(\sin x, \cos x)dx$ est invariante par une certaine transformation :

1. Si l'expression $F(\sin x, \cos x)dx$ est invariante par la transformation $x \longrightarrow -x$, dans ce cas on utilise le changement de variable $t = \cos x$.
Exemple : Soit à calculer $I = \int \frac{\sin^5 x}{\cos x}dx$. On observe que $\frac{\sin^5 x}{\cos x}dx$ est invariant par la transformation $x \longrightarrow -x$, donc on utilise le changement $t = \cos x$, d'où :

$$I = \int \frac{\sin^5 x}{\cos x}dx = \int \left(\frac{-1}{t} + 2t - t^3\right)dt = -\ln|\cos x| + \cos^2 x - \frac{1}{4}\cos^4 x + cte$$

2. Si l'expression $F(\sin x, \cos x)dx$ est invariante par la transformation $x \longrightarrow \pi - x$, dans ce cas on utilise le changement de variable $t = \sin x$.
Exemple : Pour calculer l'intégrale $J = \int \frac{2\cos x}{3-\cos 2x}dx$, on utilise le changement $x = \sin x$, d'où :

$$J = \int \frac{2\cos x}{3-\cos 2x}dx = \int \frac{\cos}{1+\sin^2 x}dx = \int \frac{dt}{1+t^2} = \ln|t| + cte = \ln|\tan x| + cte$$

3. Si l'expression $F(\sin x, \cos x)dx$ est invariante par la transformation $x \longrightarrow x + \pi$, dans ce cas on utilise le changement de variable $t = \tan x$.
Exemple : Pour calculer l'intégrale $K = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx$, on observe que $\frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx$ est invariant par la transformation $x \longrightarrow x + \pi$, donc on utilise le changement $x = \tan x$, d'où :

$$K = \int \frac{\cos^3 x(\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^5 x}dx = \int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^5 x}dx = \int \frac{d(\tan x)}{\tan^x} = -\frac{1}{4\tan^4 x} + cte$$

10 Primitives des fonctions rationnelle de sh et ch

Le calcul des intégrales de type $\int F(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)dx$ où F est une fraction rationnelle de sh et ch se ramène à une intégration d'une fraction rationnelle en t, en utilisant le changement de variable $t = \operatorname{th}\frac{x}{2} \Longleftrightarrow x = 2\operatorname{argth} t$.
En tenant compte des relations ($t \in]-1,1[$, x prend toute valeur réelle) :

$$\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1-t^2}.$$

l'intégrale proposée s'écrit sous la forme :

$$\int R\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{2dt}{1-t^2}.$$

Exemples :

1. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + cte = \ln|\operatorname{th}\frac{x}{2}| + cte$
2. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int \frac{2dt}{1+t^2} = 2\arctan t + cte = 2\arctan\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\right) + cte$

Remarque : On peut utiliser le changement de variable $t = e^x$ qui ramène lui aussi à une fraction rationnelle. Dans ce cas on a :

$$\operatorname{sh} x = \frac{t^2-1}{2t}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{t^2+1}{2t}, \quad \operatorname{th} x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{dt}{t}.$$

11 Intégrales abéliennes

Ce sont les intégrales de type $\in F(x,y)dx$ où F est une fraction rationnelle et où $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ ou $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$.

11.1 Les primitives des fonctions $F\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

On effectue le changement de variable :

$$y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

donc

$$x = \frac{b-dy^n}{cy^n-a} \text{ et } dx = \frac{ad-bc}{(cy^n-a)^2} m y^{m-1} dy.$$

Exemple : Calcul de $I = \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\frac{dx}{x}$. $(a > 0)$

Effectuons la changement de variable $y = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ ou $x = a\frac{y^2-1}{y^2+1}$, donc I devient :

$$\int \frac{4y^2dy}{(y^2+1)(y^2-1)} = \int \frac{2dy}{y^2+1} + \int \frac{2dy}{y^2-1} = 2\arctan\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + \ln\frac{|\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}|}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}} + cte.$$

11.2 Les primitives des fonctions $F\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$

On pose $y^2 = ax^2+bx+c$ et se ramène à l'une des trois formes canoniques suivantes :

- $y^2 = \alpha^2((x+\lambda)^2+\mu^2)$ ce qui conduit au changement de variable $x+\lambda = \mu \operatorname{sh} t$.
- $y^2 = \alpha^2((x+\lambda)^2-\mu^2)$ dans ce cas on utilise le changement de variable $x+\lambda = \mp\mu \operatorname{ch} t$.
- $y^2 = \alpha^2(\mu^2-(x+\lambda)^2)$ ce qui conduit au changement de variable $x+\lambda = \mu\sin t$ où $x+\lambda = \mu\cos t$

Exemple : Soit à calculer $I = \int \frac{dx}{(4+4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Posons $y = \sqrt{4+4x-x^2} = \sqrt{8-(x-2)^2}$ puis $x-2 = 2\sqrt{2}\cos t$ $(0 \le t \le \pi)$.

Donc $y = 2\sqrt{2}\sin t$ et :

$$I = \int \frac{-2\sqrt{2}\sin t dt}{(2\sqrt{2}\sin t)^3} = \frac{-1}{8}\int \frac{dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{8}\cot t + cte = \frac{1}{8}\frac{x-2}{\sqrt{4+4x-x^2}} + cte$$

••••••••••