Chapitre 2
NOMBRES COMPLEXES

Mohamed TARQI

Table des matières

1 Rappels

1.1 Corps des nombres complexes

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes, c'est à dire l'ensemble des nombres de la forme $z = x + iy$, avec x et y des nombres réels et $i^2 = -1$.

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib/(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

On a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
$\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$, elles sont définies par :

1. $(a+ib)+(a'+ib') = (a+a')+i(b'+b)$
2. $(a+ib).(a'+ib') = (aa'-bb')+i(ab'+a'b)$

$\mathbb{C}$ muni de l'addition et de la multiplication est un **corps commutatif**.

1.2 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Soit E le plan euclidien, ξ l'ensemble des vecteurs du plan, et $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé direct de E.
Les applications suivantes, (a, b étant des réels),

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{C} \longrightarrow \xi \\ z = a + ib \longrightarrow \vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{C} \longrightarrow E \\ a + ib \longrightarrow M \text{ (où } \overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j} \text{)} \end{array} \right.$$

sont des bijections
On dit que $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ est le **vecteur image** du nombre complexe $z = a + ib$ et que M est le **point image** ou tout simplement l'image de z.
Le nombre z est appelé **affixe** du point M et affixe du vecteur $\vec{v}$.

Propriétés

• Image de deux nombres complexes opposés : Elles sont symétriques par rapport à l'origine O.
• Image de deux nombres complexes conjugués : Elles sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
• Si A et B ont pour affixes respectives z_A et z_B, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$ et le milieu I de $[A,B]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

Exercice : Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les images des nombres $1, z, z' = 1 + z^2$ soient alignées.

Solution : Notons A et M' les images des nombres 1 et z'
On a
$z_{\overrightarrow{AM}} = x - 1 + iy$ et $z_{\overrightarrow{AM'}} = x^2 - y^2 + i2xy$.
Donc les points A, M, M' sont alignés si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AM'} = \lambda\overrightarrow{AM}$
d'où :

$$y(x^2 + y^2 - 2x) = 0$$

L'ensemble cherché est donc constitué par la droite d'équation $y = 0$, c'est à dire l'axe des x et par le cercle de centre A et de rayon 1.

1.3 Racines carrées d'un nombre complexe. Équation du 2^e degré

Nous allons montrer que tout nombre complexe a deux racines carrées et nous montrerons (dans les parties suivantes) aussi que tout nombre complexe a n ($n \in \mathbb{N}$) racines n^{iemes}.
Soit $a + ib$ un nombre complexe ($a, b \in \mathbb{R}$), soit $x + iy$ une de ces racines. Alors :

$$\begin{aligned} (x+iy)^2 = a + ib &\iff x^2 + y^2 + 2ixy = a + ib \\ &\iff \left\{ \begin{array}{c} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} x^2 + (-y^2) = a \\ x^2(-y^2) = \frac{-b^2}{4} \\ xyb \geq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donc, x^2 et $(-y^2)$ sont solutions de l'équation à coefficients et inconnue réels :

$$u^2 - au - \frac{b^2}{4} = 0\,;$$

cette équation a une racine positive x^2 et une racine négative $(-y^2)$, donc nécessairement :

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}, \qquad y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}, \qquad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

d'où les solutions :

$$z_1 = \varepsilon\sqrt{\tfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\varepsilon'\sqrt{\tfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \text{ et } z_2 = -z_1$$

avec $\varepsilon^2 = \varepsilon^2 = 1$ et $\varepsilon\varepsilon' b \geq 0$, d'où le théorème :

THÉORÈME 1.1. **Tout nombre complexe a deux racines opposées. Elles sont distincts si et seulement si le nombre est non nul.**

Corollaire 1.1. **Toute équation du second degré à coefficients complexes a deux racines distinctes ou confondues.**

Démonstration : On pose $T(z) = az^2 + bz + c$
On a $T(z) = a[(z+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\triangle}{4a^2}]$, avec $\triangle = b^2 - 4ac$.
Si $\triangle = 0$, $T(z)$ a l'unique solution $\frac{-b}{2a}$.
Si $\triangle \neq 0$, on désigne par δ et $-\delta$ les racines carrées de $\triangle$; $T(z)$ a deux solutions $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$. □

2 Module d'un nombre complexe. Argument d'un nombre complexe non nul

2.1 Module d'un nombre complexe

Définition 2.1. *On appelle **module** d'un nombre complexe $z = x + iy$ le réel positif $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$.*

Remarques :

1. Si M est l'image de z (dans un repère orthonormé) et $\vec{v}$ le vecteur-image de z, on a : $|z| = OM = \|\vec{v}\|$.
2. Si A et B sont deux points du plans alors $AB = |z_B - z_A|$.

Propriétés • $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
• Si $z \neq 0$, $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$
• $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ si $z' \neq 0$
• $|Im(z)| \leq |z|$ et $|Re(z)| \leq |z|$ avec égalité si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.

THÉORÈME 2.1. **On a les propriétés suivantes :**

1. $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$.

2. $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$, $\left|zz'\right| = |z|\left|z'\right|$.

3. $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$, $\left|z+z'\right| \leq |z| + \left|z'\right|$. **(Inégalité triangulaire)**

Démonstration :

1. C'est clair.
2. $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} |zz'|^2 &= zz'\overline{zz'} \\ &= z\bar{z}.z'\overline{z'} \\ &= |z|^2|z'|^2. \end{aligned}$$

3. $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} |z+z'| &= (z+z')\overline{(z+z')} \\ &= (z+z')(\bar{z}+\overline{z'}) \\ &= |z|^2+|z'|^2+z\overline{z'}+z'\bar{z} \\ &= |z|^2+|z'|^2+2Re(z\overline{z'}) \\ &\le |z|^2+|z'|^2+2\left|z\overline{z'}\right| = (|z|+|z'|)^2. \end{aligned}$$

□

Remarques :

1. L'égalité a lieu si et seulement si $Re(Z) = |Z|.(Z = z\overline{z'})$ c'est à dire $Re(Z) \in \mathbb{R}^+$.
   Si $z' = 0$,cette condition est remplie, sinon compte tenu de $z = \frac{Z}{|z'|^2}z$, cette condition s'écrit $\frac{z}{z'} \in \mathbb{R}^+$.
2. De même on a : $\left||z|-|z'|\right| \le |z-z'|$.
3. On démontre par récurrence que :

$$|z_1z_2...z_n| = |z_1||z_2|...|z_n| \quad \text{et} \quad |z_1+z_{2+}...+z_n| \le |z_1|+|z_2|+...|z_n|$$

THÉORÈME 2.2. L'ensemble des nombres complexes de module 1 muni de la multiplication est un groupe, on le désigne par U, c'est un sous-groupe du groupe multiplicatif $(\mathbb{C},\times)$.

Démonstration : Soit u un nombre complexe de module 1, alors $u^{-1} = \frac{\overline{u}}{u\overline{u}} = \overline{u} \in \mathbf{U}$. De plus si u et v sont de module 1, alors

$$|uv^{-1}| = |u||v^{-1}| = |u||v|^{-1} = 1$$

□

Remarques :

1. Soit z un nombre complexe non nul, le module de $z|z|^{-1}$ est 1, donc tout nombre complexe non nul peut s'écrire d'une manière unique sous la forme $z = |z|u$, u étant un nombre complexe de module 1.
2. Cherchons le sous-groupe engendré par i. On a :

$$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ \text{et}\ i^4 = 1$$

   Plus généralement pour tout entier n

$$i^{4n} = 1,\ i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1\ \text{et}\ i^{4n+3} = -i$$

   Donc i engendre un sous-groupe multiplicatif d'ordre 4 de $\mathbf{U}$, c'est-à-dire

$$(i) = \{i^n / n \in \mathbb{Z}\} = \{1,-1,i,-i\}$$

2.2 Argument d'un nombre complexe non nul

THÉORÈME 2.3. *(admis)* **Pour tout nombre complexe z de module 1, il existe un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$.**

Remarque : θ n'est pas unique, car si $z = e^{i\theta}$, alors $z = e^{i(\theta+2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Définition 2.2. *Soit z un nombre complexe non nul, on appelle **argument** de z et on note $\arg(z)$, l'ensemble des réels θ, tel que :$z = |z|e^{i\theta}$.*
Tout élément de $\arg(z)$ sera appelé un argument de z. Par abus de langage, on note aussi $\arg(z)$ n'importe quel élément de cette ensemble modulo 2π.

Ainsi :

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}^*, \ \exists r > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R} \quad \text{tel que } \ z = re^{i\theta}$$

avec :

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}, \cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$z = x + iy$ est la forme algébrique de z, $r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ sa forme trigonométrique, les formules précédentes permettent de passer de l'une à l'autre.

Proposition 2.1. **L'application $(r,u) \longrightarrow ru$ est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}_+^*,\times)\times(\mathbf{U},\times)$ sur $(\mathbb{C}^*,\times)$.**

Démonstration : Il s'agit d'un morphisme, puisque $\mathbb{C}$ étant commutatif, on a :

$$(ru)(r'u) = (rr')(uu')$$

Il est injectif, car $z = ru$ avec $r > 0$ et $u \in \mathbf{U}$, alors $r = |z|$ et $u = \frac{z}{r}$.
Il est surjectif, car tout complexe non nul z s'écrit $z = |z|\frac{z}{|z|}$ avec $|z| > 0$ et $\frac{z}{|z|} \in \mathbf{U}$. □
On vérifie facilement les propositions suivantes :

- $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$
- $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}\ e^{i\theta'}$
- $\forall n \in \mathbb{Z}$,$e^{ni\theta} = (\ e^{i\theta})^n$. Elle porte le nom de formule de MOIVRE.
- $\cos(\theta) = Re(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = Im(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ (Formules d'EULER)

On a la proposition suivante :

Proposition 2.2. **L'application $\theta \longrightarrow e^{i\theta}$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}^+,+)$ sur $(\mathbf{U},\times)$. Son noyau est $2\pi\mathbb{Z}$.**

Démonstration : Il s'agit d'un morphisme puisque $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ pour tous nombres réels θ et θ'.
$e^{i\theta} = 1 \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \theta = 2k\pi$, donc le noyau est $2\pi\mathbb{Z}$. □

Propriétés : On les propriétés suivantes :

1. $\begin{cases} z \text{ réel} \Longleftrightarrow z = 0 \text{ ou } \arg(z) = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow z = 0 \text{ ou } \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
2. $z' = z \Longleftrightarrow \begin{cases} |z'| = |z| \\ \arg(z') = \arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
3. $z' = -z \Longleftrightarrow \begin{cases} |z'| = |z| \\ \arg(z') = \arg(z) + (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
4. $z' = \bar{z} \Longleftrightarrow \begin{cases} |z'| = |z| \\ \arg(z') = -\arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
5. Pour z et z' non nuls, on a :
$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad \text{et} \quad \arg(\tfrac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z').$$

Démonstration : Preuve de 5. Posons $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$

• $zz' = rr'e^{i\theta}e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$

d'où $\arg(zz') = \theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z')$

• $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i\theta}e^{-i\theta'} = \frac{r}{r'}e^{i\theta}e^{i(-\theta')} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

d'où

$\arg(\frac{z}{z'}) = \theta - \theta' = \arg(z) - \arg(z')$. □

Définition 2.3. *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On pose, par définition :*

$$\boxed{e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))}$$

Propriétés • $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, e^{z+z'} = e^z e^{z'}$

• Dérivation de la fonction $x \longrightarrow e^{mx}$ à variable réelle ($m \in \mathbb{C}$)

$$\forall x \in \mathbb{R}, (e^{imx})' = me^{imx}$$

3 Racines $n^{ièmes}$ de l'unité

3.1 Racines $n^{ièmes}$ d'un nombre complexe

Soit z le nombre complexe $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, non nul, et n un entier naturel non nul. Cherchons $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ tel que $z'^n = z$ (1).

$$(1) \Longleftrightarrow [r'(\cos\theta' + i\sin\theta')]^n = r'^n(\cos n\theta' + i\sin n\theta') = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ce qui est équivalent à :

$\begin{cases} r'^n = r \\ n\theta' = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} r' = \sqrt[n]{r} \\ \theta' = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

D'où le théorème :

THÉORÈME 3.1. **Tout nombre complexe $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ non nul a n racines $n^{ièmes}$:**

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{n}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}) = \sqrt[n]{r}e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}i}, \quad 0 \le k \le n-1}.$$

On a donc :

$$|z_{k+1}| = |z_k| \text{ et } argz_{k+1} = argz_k + \frac{2\pi}{n}$$

on passe donc de l'image M_k à celle de M_{k+1} par une rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$, donc :

Proposition 3.1. **Les images des n racines $n^{ièmes}$ d'un nombre complexe non nul pour $n > 2$, sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés centré en O.**

3.2 Racines $n^{ièmes}$ de l'unité

Si Z' est une racine $n^{ième}$ de $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$ toutes les racines $n^{ièmes}$ z' de z sont telles que

$$z'^n = Z'^n = z$$

c'est-à-dire :

$$(\frac{Z'}{z'})^n = 1, Z' = z'w_k$$

w_k étant une racine $n^{ième}$ de l'unité, d'où :

Proposition 3.2. **On obtient les racines $n^{ièmes}$ d'un nombre complexe non nul en multipliant l'une d'entre elles par les n racines $n^{ièmes}$ l'unité.**

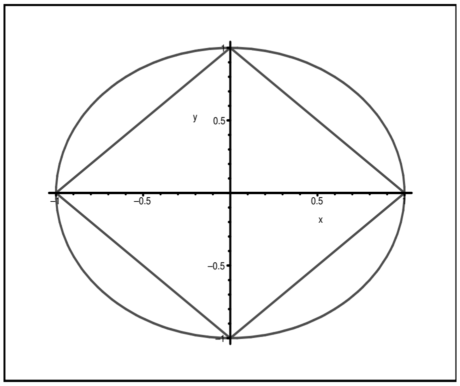

FIGURE 1 – Les racines quatrième de l'unité

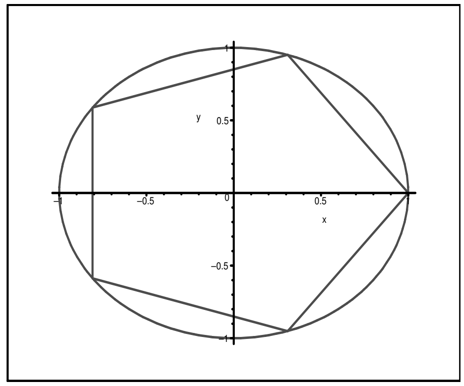

FIGURE 2 – Les racines cinquième de l'unité

1 est une racine $n^{ième}$ de l'unité et si $w_k = e^{\frac{2k\pi}{n}}$ et $w'_k = e^{\frac{2k'\pi}{n}}$ sont deux racines $n^{ièmes}$ de l'unite, alors

$$w_k(w_k)^{-1} = w_k\overline{w'_k} = e^{\frac{2(k-k')\pi}{n}}$$

est une racine $n^{ième}$ de l'unité, d'où :

THÉORÈME 3.2. L'ensemble des racines $n^{ièmes}$ de l'unité est un sous-groupe de de U, on le désigne par U_n. C'est un groupe fini de cardinal n.

Cherchons à quelle condition l'élément $e^{\frac{2p\pi}{n}}$ engendre $\mathbf{U}_n$. Pour cela il faut et il suffit que quel que soit l'entier q, il existe un entier u tel que :

$$e^{\frac{2q\pi}{n}} = (e^{\frac{2p\pi}{n}})^u = e^{\frac{2pu\pi}{n}}$$

c'est à dire qu'il existe aussi un entier v tel que :

$$\frac{2q}{n} = \frac{2pu}{n} + 2v \Longleftrightarrow q = pu + qv$$

cette dernière équation admet des solutions si et seulement si n et p sont premiers entre eux :

THÉORÈME 3.3. *(et définition)* **Un élément $e^{\frac{2p\pi}{n}}$ du groupe U_n engendre ce groupe si et seulement si n et p sont premiers entre eux. On dit alors que $e^{\frac{2p\pi}{n}}$ est une racine primitive $n^{ième}$ de l'unité.**

Remarque : $w_1 = e^{\frac{2\pi}{n}}$ est toujours racine primitive $n^{ième}$ de l'unité et pour n premier toute racine $n^{ième}$ distincte de $w_0 = 1$ est primitive. Par exemple pour $n = 6$, w_1, w_5 sont primitives mais pas w_0, w_2, w_3, w_4.

4 Applications des nombres complexes

4.1 Formule de *Moivre* et application trigonométrique

Expressions de $\sin(n\theta)$ et $\cos(n\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)
En appliquant la formule de *Moivre* et la formule de binôme :

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n \\ &= \sum_{k=0}^{k=n} \complement_n^k \cos^{n-k}(\theta) i^k \sin^k(\theta)\end{aligned}$$

d'où, en séparant les parties réelle et imaginaire :

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \cos^n(\theta) - \complement_n^2 \cos^{n-2}(\theta)\sin^2(\theta) + \complement_n^4 \cos^{n-4}(\theta)\sin^4(\theta) - \dots \\ \sin(n\theta) &= \complement_n^1 \cos^{n-1}(\theta)\sin(\theta) - \complement_n^3 \cos^{n-3}(\theta)\sin^3(\theta) + \dots\end{aligned}$$

Exemples
· $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$
· $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - \cos(\theta)$
· $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$
· $\sin(3\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta)$

Linéarisation de $\sin^n\theta$) et $\cos^n\theta$)($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$)
On a :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

donc, en utilisant la formule de $Moivre$ et la formule de binôme, on peut exprimer $\sin^n(\theta)$ et $\cos^n(\theta)$ sous forme de combinaisons linéaires de termes de la forme $\cos(p\theta)$ et $\sin(p\theta)$.

Exemple Linéarisation de $\sin^3 x\cos^2 x$.

$$\begin{aligned}
\sin^3 x\cos^2 x &= (\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i})^3(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2})^2 \\
&= -\frac{1}{2^5 i}(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix})(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}) \\
&= -\frac{1}{2^5 i}(e^{5ix} - e^{3ix} - 2e^{ix} + 2e^{-ix} + e^{-3ix} - e^{-5ix}) \\
&= -\frac{1}{2^4}(\sin(5x) - \sin(3x) - 2\sin(x))
\end{aligned}$$

Remarques :

1. On peut ramener le calcul des primitives de $\sin^n(\theta)$ et de $\cos^n(\theta)$ à celui de primitives de fonctions de la forme $\cos(p\theta)$ et $\sin(p\theta)$.
2. On linéariserait de même un produit de type $\sin^n(\theta)\cos^m(\theta)$.

Transformation de $a\cos(x) + b\sin(x)$ (a,b réels non nuls)
Posons $a + ib = re^{i\alpha}$.
Alors :

$$\begin{aligned}
a\cos(x) + b\sin(x) &= rRe(e^{i(\alpha - x)}) \\
&= r\cos(\alpha - x)
\end{aligned}$$

Remarques :

1. On utilisera cette transformation pour résoudre des équations du type :
$$a\cos(x) + b\sin(x) = c$$
2. On a :
$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2},\ \cos(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\alpha) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

4.2 Application à la géométrie euclidienne plane

Dans cette partie le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4.2.1 La trasformation $z' = az + b$

Étant donné le nombre complexe $a = ke^{i\alpha}$ (k réel strictement positif), interprétons géométriquement la transformation

$$(1) \quad z \longrightarrow z' = az$$

Soit M et M' les images respectives de z et z', posons $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$, nous aurons :

$$r'e^{i\theta'} = ke^{i\theta}re^{i\theta} \Longleftrightarrow \begin{cases} r = r'k \\ \theta' \equiv \theta + \alpha[2\pi] \end{cases}$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} OM' = kOM \\ \widehat{(Ox,\overrightarrow{OM'})} \equiv \widehat{(Ox,\overrightarrow{OM})} + \alpha[2\pi] \end{array}\right.$$

Donc (1) représente la similitude $S(O,k,\alpha)$.

Remarques : En particulier si $k=1$, la formule

$$z' = e^{i\alpha}z$$

définit la rotation de centre O et d'angle α.
Si $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$, k réel non nul, nous retrouvons l'homothétie de centre O et de rapport k, défini par $z' = kz$.
Soit M_0 un point d'affixe z_0, Considérons le repère $(M_0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit Z' l'image de Z par la similitude $S(M_0,k,\alpha)$, alors on a :

$$(2) \qquad Z' = ke^{i\alpha}Z \Longleftrightarrow z' - z_0 = ke^{i\alpha}(z - z_0$$

la formule (2) est de la forme

$$(3) \qquad z' = az + b$$

On considère maintenant la formule (3) ou a et b sont des nombres complexes quelconques.

1. Si $a = 0$, la transformation (3) correspond à l'application constante.
2. Si $a = 1$, la transformation (3) est la translation de vecteur d'affixe b.
3. Supposons $a \neq 0$ et $a \neq 1$, dans ce cas il existe z_0 tel que $z_0 = az_0 + b$ et

$$(3) \Longleftrightarrow z' - z_0 = a(z - z_0)$$

   c'est une similitude de centre M_0 d'affixe z_0, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$.

THÉORÈME **4.1.** **La transformation du plan, $M(z) \longrightarrow M(z')$ définie par**

$$z' = az + b \qquad (a \neq 0)$$

est bijective.
Si $a = ke^{i\alpha} \neq 1$, $(k>0)$ c'est une similitude de rapport k et d'angle α ; elle se réduit a une rotation pour $k=1$ et à une homothétie pour $\alpha \equiv 0[\pi]$.
Si $a = 1$ c'est une translation.

4.2.2 Module et argument de $\frac{z-a}{z-b}$

Soient $A(a)$ et $B(b)$ deux points distincts du plan $(a \neq b)$ et k un réel strictement positif. Cherchons l'ensemble des points $M(z) \neq B(b)$ tel que $|\frac{z-a}{z-b}| = k$. On a, en posant $a = \alpha + i\alpha'$, $b = \beta + i\beta'$ et $z = x + iy$:

$$\begin{aligned} |\frac{z-a}{z-b}| = k &\Longleftrightarrow |z-a|^2 = k|z-b|^2 \\ &\Longleftrightarrow (1-k^2)(x^2+y^2) - 2(\alpha + k^2\beta)x - 2(\alpha' + k^2\beta')y + \alpha^2 + \alpha'^2 - k^2(\beta^2 + \beta'^2) = 0 \end{aligned}$$

1. Si $k = 1$, l'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[A,B]$.
2. Si $k \neq 1$, on trouve un cercle.

Soit α un réel tel que $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$. L'ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg(\frac{z-a}{z-b}) \equiv \alpha[\pi]$ est un cercle passant par $A(a)$ et $B(b)$, privé de B. Il en résulte que, pour que quatre points $A(a), B(b), C(c), D(d)$ du plan soient cocycliques ou alignés, il faut et il suffit que :

$$\widehat{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BD})}[\pi]$$

ou encore

$$\arg(\frac{c-a}{c-b}) \equiv \arg(\frac{d-a}{d-b})[\pi]$$

• • • • • • • • • • •