Chapitre 20
INTÉGRATION SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE

Mohamed TARQI

Table des matières

• • • • • • • • • • •

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton.

1 Fonctions continues intégrables à valeurs positives

1.1 Définition et propriétés

Définition 1.1 *Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle I. On dit que f est intégrable (ou sommable) sur I s'il existe un réel M tel que, pour tout segment J inclus dans I, on ait $\int_J f \leq M$.*
On appelle alors intégrale de f sur I le réel $\int_I$ défini par :

$$\int_I f = \sup_{J\subset I} \int_J f.$$

Remarque : D'après la définition, l'intégrale d'une fonction positive est positive, et réciproquement, on a le résultat suivant :

Proposition 1.1 *Si f est une fonction positive sur I et $\int_I f = 0$, alors $f = 0$*

Démonstration : Soit $x_0 \in I$. Il existe un segment J inclus dans I et non réduit à un singleton, tel que $x_0 \in J \subset I$. Alors on a : $0 \leq \int_J f \leq \int_I f = 0$, donc $\int_J f = 0$. Ceci entraîne : $\forall x \in J,\ \ f(x) = 0$ et en particulier $f(x_0) = 0$. □
Si I est un intervalle fermé borné $[a,b]$, avec $a < b$, et si f est une fonction positive sur $[a,b]$, la fonction f est intégrable sur $[a,b]$ et son intégrale, au sens de cette définition, est égale à $\int_a^b f(t)dt$. En effet, puisque f est positive, alors

$$\forall J \subset [a,b], \int_J f \leq \int_a^b f(t)dt$$

avec égalité lorsque $J = [a,b]$.

Lemme 1.1 *Soit I un intervalle et a et b ses deux extrémités. Alors on peut construire une suite croissante d'intervalles inclus dans I, dont la réunion est égale à I.*

Démonstration : En effet, considérons les deux suites :

$$a_n = \begin{cases} a & \text{si } a \in I \\ a + 2^{-n} & \text{si } a \in \mathbb{R} \text{ et } a \notin I \\ -n & \text{si } a = -\infty \end{cases}$$

et

$$b_n = \begin{cases} b & \text{si } b \in I \\ b - 2^{-n} & \text{si } b \in \mathbb{R} \text{ et } b \notin I \\ n & \text{si } b = +\infty \end{cases}$$

Il est clair que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a_n = a$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} b_n = b$ et puisque $a \neq b$, on a, à partir d'un certain rang n_0, $a_n < b_n$. La suite $(a_n)_n$ étant décroissante et la suite $(b_n)_n$ étant croissante, donc la suite d'intervalles $([a_n, b_n]_n)$ est croissante et on a :

$$I = \bigcup_{n \geq n_0} [a_n, b_n]$$

□

Proposition 1.2 *Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle I et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de segments inclus dans I dont la réunion est égale à I. S'il existe un réel M tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \int_{J_n} f \leq M,$$

alors f est intégrable sur I et l'on a :

$$\int_I f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{J_n} f.$$

Démonstration :

1. Soit $J = [a, b]$ un segment inclus dans I, alors il existe des entiers n_1 et n_2 tels que $a \in J_{n_1}$ et $b \in J_{n_2}$. Considérons $n_0 = \sup\{n_1, n_2\}$, on a donc $[a, b] \subset J_{n_0}$, et comme f est positive, on en déduit :

$$\int_J f \leq \int_{J_{n_0}} f \leq M \quad (*)$$

   Donc, f est intégrable sur I.

2. La suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \int_{J_n} f \leq \int_{J_{n+1}} f \leq M$$

   Ainsi, la suite $(\int_{J_n} f)_n$ est une suite croissante majorée donc convergente vers $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_{J_n} f$ et l'inégalité $(*)$ montre que :

$$\forall J \subset I, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \int_J f \leq \int_{J_{n_0}} f \leq \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{J_n} f.$$

   On en déduit, $\int_I f \leq \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \int_{J_n} f$, et puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n \subset I$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \int_{J_n} f \leq \int_I f$$

   ce qui montre :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{J_n} f \leq \int_I f.$$

   Ce qui montre le résultat. □

1.2 Propriétés algébriques

1.2.1 Linéarité

Proposition 1.3 *Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+$, f, g deux fonctions positives intégrables sur I. Alors $\lambda f + g$ est intégrable sur I et on a :*

$$\int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g.$$

Démonstration : Soit $(J_n)_n$ une suite de segments dont la réunion est égale à I, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{J_n} (\lambda f + g) = \lambda \int_{J_n} f + \int_{J_n} g \leq \lambda \int_I f + \int_I g,$$

donc $\lambda f + g$ est intégrable.
De plus, comme $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{J_n} f = \int_I f$ et $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{J_n} g = \int_I g$, alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{J_n} (\lambda f + g) = \lambda \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{J_n} f + \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{J_n} g = \lambda \int_I f + \int_I g$$

donc

$$\int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g.$$

□

1.2.2 Croissance

Proposition 1.4 *Soient f et g deux fonctions continus positive sur I telles que $0 \leq f \leq g$. Si g est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I et on a :*

$$\int_I f \leq \int_I g$$

Démonstration : Pour tout J inclus dans I, on a :

$$\int_J f \leq \int_J g \leq \int_I g$$

donc f est intégrable sur I et $\int_I f = \sup\limits_{J \subset I} \int_J f \leq \int_I g$. □

1.2.3 Propriétés liées à l'intervalle I

Définition 1.2 *Soit f une fonction positive sur I et I' un intervalle tel que $I' \subset I$. On dit que f est intégrable sur I' si, et seulement si, la restriction $f_{|I'}$ est intégrable sur I' et on note $\int_{I'} f$ au lieu de $\int_{I'} f_{|I'}$.*

Proposition 1.5 *Soit f une fonction positive sur I et I' un intervalle tel que $I' \subset I$. Si f est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I' et on a : $\int_{I'} f \leq \int_I f$.*

Démonstration : Supposons f intégrable sur I. Pour tout segment J' inclus dans I', on a :

$$\int_{J'} f \leq \int_I f$$

donc f est intégrable sur I' et : $\int_{I'} f \leq \int_I f$. □

Proposition 1.6 *Soit f une fonction positive sur I et a un élément de I qui n'est pas une extrémité.
La fonction f est intégrable sur I si, et seulement si, ses restrictions à $I \cap]-\infty, a]$ et $I \cap [a, +\infty[$ sont intégrables, et l'on a :*

$$\int_I f = \int_{I \cap]-\infty, a]} f + \int_{I \cap [a, +\infty[} f.$$

Démonstration : Soit $J_n = [a_n, b_n]$ une suite croissante de segments de I dont la réunion est égale à I. Comme a n'est pas une extrémité de I, il existe un entier n_0 tel que $a_{n_0} < a < b_{n_0}$. La suite $(J_n)_{n\geq n_0}$ est alors aussi une suite croissante de segments de I dont la réunion est égale à I.
La suite $([a_n, a])_{n\geq n_0}$ (respectivement $([a, b_n])_{n\geq n_0}$) est une suite croissante dont la réunion est égale à $I \cap]-\infty, a]$ (respectivement $I \cap [a, +\infty[$).
La relation de CHASLES :

$$\int_{J_n} f = \int_{[a_n,a]} f + \int_{[a,b_n]} f$$

montre que la suite $(\int_{J_n} f)_{n\geq n_0}$ est majorée si, et seulement si, les suites $(\int_{[a_n,a]} f)_{n\geq n_0}$ et $(\int_{[a,b_n]} f)_{n\geq n_0}$ sont majorées. En passant à la limite, on obtient donc :

$$\int_I f = \int_{I\cap]-\infty,a]} f + \int_{I\cap[a,+\infty[} f.$$

□

Remarques :

1. Si $I = [a, +\infty[$ et $c > a$, alors toute fonction continue et positive est intégrable sur I si, et seulement si, f est intégrable sur $[c, +\infty[$ et on a dans ce cas :
$$\int_{[a,+\infty[} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,+\infty[} f.$$
2. Si $I =]-\infty, +\infty[$ et $c \in \mathbb{R}$, alors toute fonction continue et positive est intégrable sur I si, et seulement si, f est intégrable sur $[c, +\infty[$ et sur $]-\infty, c]$ et on a dans ce cas :
$$\int_{]-\infty,+\infty[} f = \int_{]-\infty,c]} f + \int_{]c,+\infty[} f.$$

2 Calcul pratique des intégrales impropres

2.1 Caractérisation à l'aide d'une primitive

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, $(a < b)$, alors f est intégrable sur I et d'après le théorème fondamental, pour toute primitive F de f, on a :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Dans cette partie et dans les cas $I = [a, b[$, $I =]a, b]$, $I =]a, b[$, on va donner une généralisation en utilisant des limites.

Proposition 2.1 *Soient $(a, b) \in (\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}})$ tel que $a < b$ et f une fonction continue positive sur $[a, b[$. Notons F l'application définie sur $[a, b[$ par :*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *f est intégrable sur $[a, b[$.*
2. *F est majorée sur $[a, b[$.*
3. *F admet une limite finie en b.*

Si l'un des propriétés est vérifiée, alors

$$\int_{[a,b[} f = \sup_{x\in[a,b[} \int_a^x f(t)dt = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \int_a^x f(t)dt.$$

L'intégrale $\int_{[a,b[} f$ est alors aussi notée $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t)dt$.

Démonstration : 1) $\Longrightarrow$ 2) En effet, pour tout $x \in [a,b[$, comme f est positive et $[a,x] \subset [a,b[$, on a :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_{[a,x]} f \leq \int_{[a,b[} f$$

ce qui montre que F est majorée par $\int_{[a,b[} f$.
2) $\Longrightarrow$ 3) Supposons que F est majorée sur $[a,b[$. Comme f est croissante, il en résulte que F admet une limite en b.
3) $\Longrightarrow$ 1) Soit L cette limite, comme F est croissante, alors

$$\forall x \in [a,b[, \quad \int_a^x f = F(x) \leq L$$

Soit J un segment quelconque inclus dans $[a,b[$, notons x l'extrémité droite de J, alors on a :

$$\int_J f \leq \int_a^x f = F(x) \leq L$$

Donc f est intégrable sur $[a,b[$ et $\int_{[a,b]} f \leq L$.
D'autre part :

$$\forall x \in [a,b[, \ \ F(x) \leq \int_{[a,b]} f \Longrightarrow L \leq \int_{[a,b]} f$$

Donc : $\int_{[a,b[} f = L$. □
Le résultat suivant se démontre d'une manière analogue :

Corollaire 2.1 *Soient $(a,b) \in (\overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R})$ tel que $a < b$ et f une fonction continue positive sur $]a,b]$. Notons F l'application définie sur $]a,b]$ par :*

$$F(x) = \int_x^b f(t)dt$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *f est intégrable sur $]a,b]$.*
2. *F est majorée sur $]a,b]$.*
3. *F admet une limite finie en a.*

Si l'un des propriétés est vérifiée, alors

$$\int_{]a,b]} f = \sup_{x \in]a,b]} \int_a^x f(t)dt = \lim_{x \longrightarrow +a} \int_a^x f(t)dt.$$

L'intégrale $\int_{]a,b]} f$ est alors aussi notée $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t)dt$.

Exemples :

1. Pour tout $x > 0$, on a $\int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x}$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ existe et vaut 1.
2. $\forall x \in]0,1]$, on a $\int_x^1 -\ln t dt = [-t\ln t + t]_x^1 = -x + \ln x + 1$, donc la fonction $x \longrightarrow -\ln x$ est intégrable sur $]0,1]$ et $\int_0^1 (-\ln t)dt = 1$.

Corollaire 2.2 *Soient $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $a < b$ et f une fonction continue positive sur $[a,b[$. F étant un primitive de f sur $]a,b[$ et $c \in]a,b[$.*
La fonction f est intégrable sur $]a,b[$ si, et seulement si, la fonction F a des limites finies en a et b, et l'on a :

$$\int_{]a,b[} f = \lim_{x \longrightarrow a} F(x) + \lim_{x \longrightarrow b} F(x) = \lim_{x \longrightarrow a} \int_x^c f(t)dt + \lim_{x \longrightarrow b} \int_c^x f(t)dt.$$

Cette intégrale on la note $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t)dt$.

Exemple : Pour tout couple (x,y) de réels tel que $x<y$, on a :

$$\int_x^y \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan y - \arctan x$$

Dont $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \pi.$$

2.2 Règles de comparaison des fonctions positives

Proposition 2.2 (Exemples de RIEMANN) Soient α un réel et a un réel strictement positif.

1. La fonction $t \longrightarrow \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[a,+\infty[$ si, et seulement si, $\alpha>1$.
2. La fonction $t \longrightarrow \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,a]$ si, et seulement si, $\alpha<1$.

Démonstration : Une primitive de $t \longrightarrow \frac{1}{t^\alpha}$ sur $]0,+\infty[$ est $t \longrightarrow \ln t$ si $\alpha=1$ et $t \longrightarrow \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{t^{\alpha-1}}$. Sinon cette primitive admet une limite finie en $+\infty$ si, et seulement si, $\alpha>1$ et une limite en 0 si, et seulement si, $\alpha<1$. □

Proposition 2.3 *Soient f et g deux fonctions continues positives sur un intervalle I. Si $f \leq g$ et si g est intégrable sur I, alors la fonction f est intégrable sur I et on a $\int_I f \leq \int_I g$.*

Démonstration : Pour tout intervalle J inclus dans I on a :

$$\int_J f \leq \int_J g \leq \int_I g$$

ceci montre que f est intégrable sur l'intervalle I et que $\int_I f \leq \int_I g$. □

Exemple : La fonction $f(x)=e^{-x^2}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$, d'autre part, $\forall x \geq 1$, $f(x) \leq e^{-x}$, ainsi la fonction f est intégrable sur $[0,+\infty[$.
De même f est intégrable sur $]-\infty,0]$, donc f est intégrable sur $]-\infty,+\infty[$.

Proposition 2.4 (Règle $x^\alpha f(x)$ en $+\infty$) Soient a un réel strictement positif et f une fonction continue et positive.

1. S'il existe $\alpha \in]1,+\infty[$ tel que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x^\alpha f(x)=0$ alors f est intégrable sur $[a,+\infty[$.
2. S'il existe $\alpha \in]-\infty,1[$ tel que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x^\alpha f(x)=+\infty$ alors f n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$.

Démonstration : • Il existe $c>a$ tel que $\forall x \geq C$, $0 \leq x^\alpha f(x) \leq 1$, d'où :

$$\forall x \geq c, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^\alpha}$$

On conclut avec la dernière proposition et l'exemple de RIEMMAN.
• Il existe $c>a$ tel que $\forall x \geq C$, $x^\alpha f(x) \geq 1$, d'où :

$$\forall x \geq c, \quad f(x) \geq \frac{1}{x^\alpha}$$

On conclut toujours avec la dernière proposition et l'exemple de RIEMMENN . □
De même on a la règle de comparaison au voisinage d'un point fini :

Proposition 2.5 (Règle $(x-a)^\alpha f(x)$ en $a+$) Soient (a,b) un couple de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction continue et positive définie sur $]a,b]$.

1. S'il existe $\alpha \in]-\infty,1[$ tel que $\lim\limits_{x\longrightarrow a^+} (x-a)^\alpha f(x)=0$ alors f est intégrable sur $]a,b]$.
2. S'il existe $\alpha \in]1,+\infty[$ tel que $\lim\limits_{x\longrightarrow a^+} (x-a)^\alpha f(x)=+\infty$ alors f n'est pas intégrable sur $]a,b]$.

Exemples :

1. La fonction définie sur $]0,1]$ par $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,1]$ et l'on a :
$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}\sqrt{x}f(x)=1$$
Comme la fonction $x\longrightarrow x^{\frac{-1}{2}}$ est intégrable sur $]0,1]$, elle est de même de f.
2. On a $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}x^{747}e^{-x^2}=0$, donc la fonction $x\longrightarrow e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
3. On a, pour tout $t\geq 1$, $\frac{\sin t}{t^2}\leq\frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ existe, donc $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}dt$ existe.

3 Fonctions intégrables à valeurs complexes

3.1 Définitions et propriétés

Définition 3.1 *Une fonction f continue sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{C}$ est intégrable sur I si $|f|$ est intégrable sur I.*

Exemple : La fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=e^{ix^2}$ n'est pas intégrable, puisque son module, égal à 1, n'est pas intégrable.
On immédiatement le résultat suivant :

Proposition 3.1 *Soit f une fonction continue sur I dans $\mathbb{C}$ et g une fonction continue sur I a valeurs positives. Si g est intégrable sur I et $|f|\leq g$, alors f est intégrable sur I.*

Étant donnée une f continue sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, les fonctions f^+ et f^- définies par :
$$f^+(x)=\sup(f(x),0)\text{ et }f^-=\inf(-f(x),0)$$
sont continues et positives et vérifiant les relations :
$$f=f^+-f^-\text{ et }|f|=f^+f^-$$

Proposition 3.2
1. *Une fonction f continue sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est intégrable sur I si, et seulement si, f^+ et f^- sont intégrables sur I.*
2. *Une fonction g continue de I dans $\mathbb{C}$ est intégrable sur I si, et seulement si, Reg et Img sont intégrables sur I.*

Démonstration : En effet, on a les inégalités :
$$f^+\leq|f|,\ f^-\leq|f|,\ |Reg|\leq|g|,\ |Img|\leq|g|$$
ainsi que les relations
$$|f|=f^++f^-\text{ et }|g|\leq|Reg|+|Img|.$$
□

Définition 3.2
1. *Si f est une fonction continue sur I dans $\mathbb{R}$ est intégrable, on note :*
$$\int_I f=\int_I f^+-\int_I f^-$$
que l'on appelle l'intégrale de f sur I
2. *Si f est continue sur I a valeurs complexes et est intégrable, on note :*
$$\int_I f=\int_I Ref+i\int_I Imf$$
que l'on appelle l'intégrale de f sur I

Proposition 3.3 *Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si f est intégrable sur I, alors pour toute suite croissante $(J_n)_n$ de segments dont la réunion est égale à I, on a :*
$$\int_I f=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{J_n}f.$$

Démonstration :

1. Si f est à valeurs réelles :
$$\int_{J_n} f = \int_{J_n} (f^+ - f^-) = \int_{J_n} f^+ - \int_{J_n} f^-$$
donc
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{J_n} f = \int_I f^+ - \int_I f^- = \int_I f$$
2. Si f est à valeurs complexes :
$$\int_{J_n} f = \int_{J_n} (Ref + iImf) = \int_{J_n} Ref + i\int_{J_n} Imf$$
donc
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{J_n} f = \int_I Ref + i\int_I Imf = \int_I f$$

□

On montre facilement le théorème suivant :

Théorème 3.1 *L'intégrale est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues intégrables sur I.*

Proposition 3.4 *Si f est fonction continue sur I à valeurs complexes et intégrable sur I, alors on a :*
$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|.$$

Démonstration : En effet, pour tout suite croissante $(J_n)_n$ de segments dont la réunion est égale à I, on a :
$$\left|\int_{J_n} f\right| \leq \int_{J_n} |f| \leq \int_I |f|.$$
ce qui, par passage à la limite, nous donne le résultat. □

Proposition 3.5 Inégalité de CAUCHY-SCWARZ Soient f et g deux fonctions continues sur I à valeurs complexes. Si f^2 et g^2 sont intégrables sur I, alors $\overline{f}g$ est intégrables sur I et on a :
$$\left|\int_I \overline{f}g\right|^2 \leq \left(\int_I \left|\overline{f}g\right|\right)^2 \leq \left(\int_I |f|^2\right)\left(\int_I |g|^2\right).$$

Démonstration : On a $(|f|-|g|)^2 \geq 0$, donc $0 \leq |\overline{f}g| \leq \frac{1}{2}\left(|f|^2+|g|^2\right)$. Donc $|\overline{f}g|$ est intégrable et de même pour $\overline{f}g$. Pour tout suite croissante $(J_n)_n$ de segments dont la réunion est égale à I, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \leq \left(\int_{J_n} \left|\overline{f}g\right|\right)^2 \leq \left(\int_{J_n} |f|^2\right)\left(\int_{J_n} |g|^2\right).$$
ce qui, par passage à la limite, nous donne le résultat. □

Proposition 3.6 *Soit $c \in]a,b[$ et f une fonction intégrable sur $]a,b[$, alors*
$$\int_{]a,b[} f = \int_{]a,c]} f + \int_{[c,b[} f.$$

Notation : Si $b < a$, on note $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Remarque : La relation de CHASLES, avec cette notation, s'écrit : Pour tous réels a, b, c de I :
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$
.

3.2 Caractérisation à l'aide d'une primitive

Proposition 3.7 *Soient $(a,b) \in (\mathbb{R}\times\overline{\mathbb{R}})$ tel que $a<b$ et f une fonction continue. Notons F l'application définie sur $[a,b[$ par :*

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

Si f est intégrable sur $[a,b[$, alors F admet une limite finie en b et :

$$\int_{[a,b[} f = \lim_{x\longrightarrow+\infty}\int_a^x f(t)dt.$$

L'intégrale $\int_{[a,b[} f$ est alors aussi notée $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t)dt$.

Démonstration :

1. Le cas réel : Supposons f est intégrable sur $[a,b[$, alors f^+ et f^- sont intégrables sur $[a,b[$ et
$$\int_{[a,b[} f = \int_{[a,b[} f^+ + \int_{[a,b[} f^-$$
et d'après ce qu'on a vu pour les fonctions positives, on a :
$$\lim_{x\longrightarrow b}\int_a^x f^+ = \int_{[a,b[} f^+ \text{ et } \lim_{x\longrightarrow b}\int_a^x f^- = \int_{[a,b[} f^-$$
il en résulte que F admet une limite finie en b et que :
$$\lim_{x\longrightarrow b}\int_a^x f(t)dt = \lim_{x\longrightarrow b}\int_a^x f^+ - \lim_{x\longrightarrow b}\int_a^x f^- = \int_{[a,b[} f^+ - \int_{[a,b[} f^- = \int_{[a,b[} f$$
2. Le cas complexe : La relation $f = Ref + iImf$ prouve, en appliquant ce qui précède à Ref et Imf, le résultat pour toute fonction complexe intégrable.

□

De la même manière, on montre le résultat suivant :

Corollaire 3.1 *Soient $(a,b)\in(\overline{\mathbb{R}}\times\mathbb{R})$ tel que $a<b$ et f une fonction continue sur $[a,b[$. Notons F l'application définie sur $]a,b]$ par :*

$$F(x)=\int_x^b f(t)dt$$

Si f est intégrable sur $]a,b]$, alors F admet une limite finie en a, et on a :

$$\int_{]a,b]} f \lim_{x\longrightarrow+a}\int_a^x f(t)dt.$$

L'intégrale $\int_{]a,b]} f$ est alors aussi notée $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t)dt$.

Exemple : L'intégrale $\int_0^1 \sin\frac{1}{t}dt$ est-elle convergente ?
Posons $F(x)=\int_x^1 \sin\frac{1}{t}dt$ $(0<x<1)$ et faisons le changement de variable $t=\frac{1}{u}$, alors $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^1 \sin u.\frac{-du}{u^2}$ ou encore $F(x)=\int_1^X \frac{\sin u}{u^2}du$ avec $(X=\frac{1}{x})$.
Or $\frac{|\sin u|}{u^2}\le\frac{1}{u^2}$; l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{u^2}$ est convergente, donc aussi l'intégrale proposée.

Corollaire 3.2 *Soient $(a,b)\in\overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $a<b$ et f une fonction continue $]a,b[$. F étant un primitive de f sur $]a,b[$ et $c\in]a,b[$.*
La fonction f est intégrable sur $]a,b[$ si, et seulement si, la fonction F a des limites finies en a et b, et l'on a :

$$\int_{]a,b[} f = \lim_{x\longrightarrow a}F(x)+\lim_{x\longrightarrow b}F(x) = \lim_{x\longrightarrow a}\int_x^c f(t)dt + \lim_{x\longrightarrow b}\int_c^x f(t)dt.$$

Cette intégrale on la note $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t)dt$.

Démonstration : Il suffit d'utiliser la relation de CHASLES :

$$\int_{]a,b[} f = \int_{]a,c]} f + \int_{[c,b[} f$$

et d'appliquer ce qui est précède. □

Exemple : Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ définie sur $[1, +\infty[$. À l'aide d'une intégration par parties, on a pour tout $x \geq 1$:

$$\int_1^x f(t)dt = \frac{-\cos x}{x} + cos1 - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$$

D'une part, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{-\cos x}{x} + cos1 = \cos 1$.
D'autre part, $x \longrightarrow \frac{\cos x}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, car $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$, donc

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} = \int_{[1,+\infty[} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Il en résulte que la fonction f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

• • • • • • • • • •