

Chapitre 21

ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS

(1) PRODUIT SCALAIRE. ORTHOGONALITÉ

Mohamed TARQI

Table des matières

1	Produit scalaire sur un espace vectoriel	1
1.1	Définitions et propriétés	1
1.2	Norme et distance associées à un produit scalaire	2
1.3	Angle de deux vecteurs	4
1.4	Vecteurs unitaires, vecteurs orthogonaux	4
1.5	Orthogonale d'une partie	5
2	Espaces euclidiens	6
2.1	Existence de bases orthonormales	6
2.2	Projecteurs orthogonaux	8
2.3	Formes linéaires et hyperplans	9
3	Orientation. Produit vectoriel	9
3.1	Orientation d'un espace euclidien	9
3.2	Produit vectoriel dans un espace euclidien orienté de dimension 3	10

.....

Dans ce chapitre E est un espace vectoriel réel.

1 Produit scalaire sur un espace vectoriel

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1 On dit qu'une application $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $\forall x, y, x', y' \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{R} :$

$$f(\lambda x + \mu x', y) = \lambda f(x, y) + \mu f(x', y)$$

On dit que f est linéaire à gauche.

$$f(x, \lambda y + \mu y') = \lambda f(x, y) + \mu f(x, y')$$

On dit que f est linéaire à droite.

2. $\forall x, y \in E, f(x, y) = f(y, x)$. On dit que f est symétrique.

3. $\forall x \in E, f(x, x) \geq 0$. On dit que f est positive.

4. $\forall x \in E, f(x, x) = 0 \iff x = 0$. On dit que f est définie.

Remarque : Cette définition s'énonce en disant que f est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Notation : Au lieu de noter $f(x, y)$, on note souvent le produit scalaire de x et y par $(x|y)$, ou $x.y$ ou $\langle x|y \rangle$. En géométrie élémentaire on note $\vec{x} \cdot \vec{y}$.

Remarque : Si le caractère symétrique de f est établi, la bilinéarité à droite équivalent à la linéarité à gauche.

Proposition 1.1 (Inégalité de CAUCHY-SCHWARTZ) Soit $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E . Alors $\forall x, y \in E$, on a :

$$(x|y)^2 \leq (x|x)(y|y).$$

De plus il y a égalité si, et seulement si, x et y sont liés.

Démonstration : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, considérons le trinôme :

$$T(\lambda) = (x + \lambda y|x + \lambda y) = \lambda^2(y|y) + 2\lambda(x|y) + (x|x).$$

1. Si $(y|y) = 0$, alors $y = 0$ et l'inégalité est toujours vérifiée, car $(x|x) \geq 0$.
2. Si $(y|y) > 0$, alors, comme $T(\lambda) \geq 0$, $\Delta' = (x|y)^2 - (x|x)(y|y) \leq 0$.

Le cas d'égalité :

1. Si $y = 0$, y est proportionnel à tout vecteur x .
2. Si $y \neq 0$, dans $T(\lambda)$ admet une racine double α tel que $(x + \alpha y|x + \alpha y) = 0$, soit par conséquent $x + \alpha y = 0$. Les x et y sont donc proportionnels.

□

Exemples :

1. L'application $(\cdot|\cdot) : (x, y) \longrightarrow \sum_{k=0}^n x_k y_k$, définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est un produit scalaire, c'est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. L'inégalité de Cauchy-Schwartz s'écrit :

$$\left(\sum_{k=0}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=0}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=0}^n y_k^2 \right)$$

Si on pose $X = M(x, B)$ et $Y = M(y, B)$, alors $(x|y) = {}^tXY$.

2. Soit $E = C([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$ ($a < b$). L'application $(f, g) \longrightarrow \int_a^b f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire. L'inégalité de Cauchy-Schwartz s'écrit :

$$\forall f, g \in E, \left(\int_a^b f(t)g(t)dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)dt \right) \left(\int_a^b g^2(t)dt \right).$$

3. Sur $\mathbb{R}^3$, la forme bilinéaire symétrique S définie par :

$$S((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + yy' + zz' + \frac{1}{2}(xy' + xz' + yx' + yz' + zx' + zy')$$

est un produit scalaire.

1.2 Norme et distance associées à un produit scalaire

Soit $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E . Posons : $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ et considérons l'application de E dans $\mathbb{R}^+$ définie par : $x \longrightarrow \|x\|$.

Théorème et définition 1.1 Cette application vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$ et $\|x\| \iff x = 0$.
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
- $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (Inégalité triangulaire)

On dit que l'application $x \longrightarrow \|x\|$ est une norme sur E .

Démonstration :

1. $\forall x \in E, \|x\| = (x|x) \geq 0$ et puisque $(\cdot|\cdot)$ est définie,

$$\|x\| = 0 \iff (x|x) = 0 \iff x = 0.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, $\|\lambda x\| = (\lambda x|\lambda x) = \lambda^2(x|x)$. d'où $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

3. $\forall x, y \in E$,

$$\begin{aligned} \|x+y\| &= (x+y|x+y) \\ &= (x|x) + 2(x|y) + (y|y) \\ &\leq (x|x) + 2(x|x)(y|y) + (y|y) \\ &\leq [(x|x) + (y|y)]^2 \end{aligned}$$

□

Remarques :

1. L'inégalité de Cauchy-Schwartz s'écrit donc :

$$\forall x, y \in E, |(x|y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

2. Pour tous vecteurs x et y de E , on a : $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

3. Les normes associées aux exemples précédents, s'écrivent respectivement :

$$(a) \quad \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

$$(b) \quad \forall f \in C([a, b], \mathbb{R}), \|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}.$$

$$(c) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz}.$$

Théorème et définition 1.2 Soit $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E et soit $x \mapsto \|x\|$ la norme associée. L'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $d(x, y) = \|x - y\|$ vérifie les propriétés suivantes :

- $d(x, y) \geq 0$ et $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x)$.
- $\forall x, y, z \in E, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (Inégalité triangulaire).

Démonstration : La preuve est immédiate, à titre d'exercice.

□

Proposition 1.2 (Identité du parallélogramme) Soit $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée. Alors on a :

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Démonstration : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E$.

$$\|\alpha x + \beta y\|^2 = \alpha^2 \|x\|^2 + 2\alpha\beta(x|y) + \beta^2 \|y\|^2.$$

en particulier :

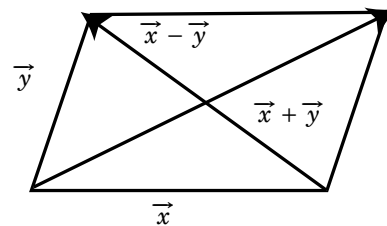
$$\begin{cases} \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2 \\ \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2 \end{cases}$$

Par addition de ces deux équation, on obtient : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

□

Interprétation géométrique de l'identité

du parallélogramme : La somme des carrés des cotes d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des diagonales.



Remarque : On a aussi les égalités qui permettent d'exprimer le produit scalaire en fonction de la norme :

$$(x, y) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - (\|x\|^2 - \|y\|^2)) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2).$$

1.3 Angle de deux vecteurs

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$. Soient x et y deux vecteurs non nuls de E , alors $\|x\| \neq 0$ et $\|y\| \neq 0$ et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$-1 \leq \frac{(x|y)}{\|x\|\|y\|} \leq 1,$$

il existe alors un nombre réel θ unique dans $[0, \pi]$ tel que :

$$\cos \theta = \frac{(x|y)}{\|x\|\|y\|}.$$

Ce nombre θ , par définition, est l'angle non orienté des deux vecteurs x et y .

1.4 Vecteurs unitaires, vecteurs orthogonaux

Définition 1.2 Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E associée à un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$.

1. Un vecteur x de E est unitaire ou normé si $\|x\| = 1$.
2. Deux vecteurs x et y de E sont dites orthogonaux si $(x|y) = 0$.

Remarques :

1. Si $x \neq 0$, les vecteurs $\frac{x}{\|x\|}$ et $\frac{-x}{\|x\|}$ sont unitaires.
2. Le seul vecteur qu'il est orthogonal à lui-même est le vecteur nul.
3. L'orthogonalité entre les vecteurs de E est une relation symétrique.

Définition 1.3 On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est orthogonale si les vecteurs x_i sont orthogonaux deux à deux. Si de plus ils sont unitaires, alors la famille est dite orthonormée.

Définition 1.4 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . Si c'est une famille orthonormée, on dit que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, en abrégé B.O.N.

Remarques :

1. La base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est orthonormale si, et seulement si,

$$\forall (i, j) \in [1, n]^2, \quad (e_i | e_j) = \delta_{ij}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

2. La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une B.O.N pour le produit scalaire canonique.

Proposition 1.3 Si une famille $(x_i)_{i \in I}$ est orthogonale et formée de vecteurs non nuls, alors cette famille est libre.

Démonstration : Soit $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ une famille finie de $(x_i)_{i \in I}$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des scalaires tels que $\sum_{j=0}^n \lambda_j x_{i_j} = 0$, alors $\forall k \in [1, n], (x_{i_k} | \sum_{j=0}^n \lambda_j x_{i_j}) = \lambda_k (x_{i_k} | x_{i_k}) = 0$, puisque $x_{i_k} \neq 0$ alors $\lambda_k = 0$. Donc la famille est libre. En particulier toute famille orthonormée est libre. $\square$

Proposition 1.4 Si la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est orthogonale, alors

$$\left\| \sum_{i=1}^p x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|x_i\|^2 \text{ (Relation de PYTHAGORE).}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^p x_i \right\|^2 &= \left(\sum_{k=1}^p x_k | \sum_{k=1}^p x_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^p \|x_k\|^2 + \sum_{i \neq j} (x_i | x_j) \\ &= \sum_{k=1}^p \|x_k\|^2. \end{aligned}$$

$\square$

Remarques :

1. Dans le cas où $p = 2$, il y a équivalence entre $(x|y) = 0$ et $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. En effet, on a pour tout x et y de E , $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$.
2. Dans le plan euclidien le triangle ABC est rectangle en A si, et seulement si, $\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2$.

Proposition 1.5 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une B.O.N de E . Pour tout x de E , on a :

$$x = \sum_{k=1}^n (x|e_k) e_k.$$

Démonstration : Soit $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$ un vecteur exprimé dans la base $\mathcal{B}$, alors, $\forall j \in [1, n]$,

$$(x|e_j) = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k | e_j \right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (e_k | e_j) = \lambda_j (e_j | e_j) = \lambda_j.$$

$\square$

1.5 Orthogonale d'une partie

Définition 1.5 Soit A une partie de E . On appelle orthogonal de A en on note $A^\perp$, l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les éléments de A .

Deux parties A et B de E sont dites orthogonales si $\forall a \in A, \forall b \in B, (a|b) = 0$.

Remarques :

1. On a $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$.
2. $A^\perp$ est toujours un sous-espace vectoriel de E , même si A n'est pas un sous-espace, en effet, soient $x, y \in A^\perp$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors

$$\forall z \in A, (\lambda x + \mu y | z) = \lambda(x|z) + \mu(y|z) = 0$$

donc $\lambda x + \mu y \in A^\perp$.

Proposition 1.6 Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors la somme $F + F^\perp$ est directe : $F \cap F^\perp = \{0\}$.

Démonstration : Soit $x \in F \cap F^\perp$ alors $x \in F$, alors $(x|z) = 0$ pour tout z de F , en particulier $(x|x) = 0$, donc $x = 0$. $\square$

2 Espaces euclidiens

Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

Définition 2.1 1. Un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est dit préhilbertien.

2. Un espace euclidien est une espace préhilbertien réel de dimension finie.

Remarque : Si E est un espace vectoriel euclidien, alors tout sous-espace vectoriel de E est espace vectoriel euclidien, pour la restriction du produit scalaire.

2.1 Existence de bases orthonormales

Lemme 2.1 Soit e un vecteur non nul de E , alors tout vecteur x de E s'écrit de façon unique sous la forme : $x = \alpha e + y$ avec e et y orthogonaux.

Démonstration : L'unicité : Si $x = \beta e + z$ avec e et z orthogonaux, on a : $(\beta - \alpha)e = y - z$ avec $(\beta - \alpha)e$ et $y - z$ orthogonaux, donc $\beta = \alpha$ et $z = y$.

L'existence : Le vecteur e n'étant pas nul, posons $\alpha = \frac{(x|e)}{\|e\|^2}$ et $y = x - \alpha e$. Il suffit alors de vérifier que $(y|e) = 0$, on a :

$$(y|e) = (x - \alpha e|e) = (x|e) - \alpha(e|e) = 0$$

le vecteur αe est la projection orthogonale de x sur $\text{Vect}(e)$. $\square$

Théorème 2.1 Tout espace vectoriel euclidien admet des bases orthonormales. Plus précisément, si $B = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de E , alors on peut construire une B.O.N de E telle que :

$$\forall p \in [1, n], \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p) = \text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_p).$$

Démonstration : Soit $B = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de E , nous cherchons une base $B' = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

Soit $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$. On sait que le vecteur f_2 s'écrit de façon unique sous forme $f_2 = \alpha f_1 + f'_2$, f_1 et f'_2 orthogonaux. f'_2 n'est pas nul, sinon on aurait $f_2 = \alpha f_1$ et les vecteurs f_1 et f_2 ne seraient pas libre. On choisit alors le vecteur e_2 défini par :

$$e_2 = \frac{f'_2}{\|f'_2\|}.$$

Les vecteurs e_1 et e_2 sont orthogonaux, puisque

$$(e_1|e_2) = \left(\frac{f_1}{\|f_1\|} \middle| \frac{f'_2}{\|f'_2\|} \right) = 0.$$

On a bien $\text{Vect}(e_1) = \text{Vect}(f_1)$ et $\text{Vect}(e_1, e_2) = \text{Vect}(f_1, f_2)$.

La démonstration du théorème se poursuit par récurrence. Supposons construits, pour $1 \leq k \leq n$, des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_k$ qui engendrent le même sous-espace vectoriel que les vecteurs $f_1, f_2, \dots, f_k$.

On cherche des nombres réels $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ tels que le vecteur :

$$f'_k = f_{k+1} + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_k e_k$$

soit orthogonal aux vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_k$. Les réels $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ doivent vérifier les relations :

$$(f'_{k+1}|e_i) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, k.$$

Ces relations fournissent les coefficients β_i cherchées. Le vecteur f'_{k+1} n'est nul, sinon $f_{k+1} \in \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) = \text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_k)$, ce qui contredit le fait que (f_i) soit une base. on choisit alors

$$e_{k+1} = \frac{f'_{k+1}}{\|f'_{k+1}\|},$$

c'est un vecteur orthogonal aux vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_k$. En outre,

$$\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{k+1}) = \text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_{k+1})$$

Ainsi, par récurrence, on a construit la base (e_i) orthonormée. $\square$

Corollaire 2.1 Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E , $F^\perp$ le sous-espace orthogonal de F . Alors $E = F \oplus F^\perp$.

Démonstration : L'unicité : Supposons que $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ avec $x_1, y_1 \in F$ et $y_1, y_2 \in F^\perp$, par différence, nous obtenons :

$$x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in F \cap F^\perp = \{0\}.$$

Donc $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = 0$.

L'existence : Soit $p = \dim F$, $1 \leq p \leq n$ et soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une B.O.N de F ; c'est une famille libre de E qui peut être complétée en une base de E , soit $(e_1, e_2, \dots, e_p, f_{p+1}, \dots, f_n)$. En appliquant à cette base le procédé d'orthonormalisation les premiers vecteurs restent inchangés, on obtient donc une B.O.N de E $(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$.

soit $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$, nous allons montrer que $G = F^\perp$. soit $x = \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i \in G$, on a :

$$(x|e_1) = (x|e_2) = \dots = (x|e_n) = 0$$

donc $(x|y) = 0, \forall y \in F$, donc $x \in F^\perp$, c'est-à-dire $G \subset F^\perp$.

Inversement, soit $z \in F^\perp$, $z = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$, avec $\beta_i = (z|e_i)$. D'autre part, puisque $z \in F^\perp$, on a : $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0$, donc

$$z = \sum_{i=p+1}^n \beta_i e_i \in G.$$

D'où $F^\perp = G$. $\square$

Remarques :

1. par construction la matrice de passage de la base (f_i) à la base (e_i) est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs ;
2. Soit $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ une famille orthonormale non génératrice de E ; on peut la compléter en une B.O.N $(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$.

Exemple : Considérons $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire :

$$S((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + yy' + zz' + \frac{1}{2}(xy' + xz' + yx' + yz' + zx' + zy')$$

dont la norme associée est :

$$\|(x, y, z)\| = \frac{1}{2} \sqrt{(x+y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2}$$

Construisons une base orthonormée (f_1, f_2, f_3) par le procédé de Schmidt à partir de la base canonique.

◦ Le vecteur $e_1 = (1, 0, 0)$ est normé, donc on prend $f_1 = e_1$.

◦ Cherchons g_2 orthogonal à f_1 de la forme :

$$g_2 = e_2 - \lambda f_1$$

On a $(f_1|f_2) = (f_1|e_2) - \lambda$, donc il suffit de prendre $\lambda = (f_1|e_2) = \frac{1}{2}$, ce qui donne $g_2 = (\frac{-1}{2}, 1, 0)$, donc $f_2 = (\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, 0)$.

◦ Cherchons g_3 orthogonal à f_1 et f_2 de la forme de la forme

$$g_3 = e_3 - \lambda f_1 - \mu f_2.$$

Il suffit de prendre $\lambda = (f_1|e_3) = \frac{1}{2}$ et $\mu = (f_2|e_3) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, ce qui donne $g_3 = (\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, 1)$ et $f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 3)$.

2.2 Projecteurs orthogonaux

Définition 2.2 Soit F un sous-espace vectoriel de E . La projection p_F sur F parallèlement à $F^\perp$ est appelée projection orthogonale sur F .

De même, on appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie s_F par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.

Soit $\mathcal{B}_F = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F , alors $\forall x \in E$, $p_F(x) \in F$, donc il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ tels que : $p_F(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$.

D'autre part $\forall k \in [1, p]$, $\lambda_k = (e_k | p_F(x)) = (e_k | y) = (e_k | x)$, avec $x = y + z$, $x \in F$, $z \in F^\perp$. On déduit donc

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p (x | e_i) e_i.$$

Comme $s_F = 2p_F - id_E$, alors pour tout x de E , on a :

$$s_F(x) = 2 \sum_{i=1}^p (x | e_i) e_i - x.$$

Remarque : Si p est la projection orthogonale sur F , celle sur $F^\perp$ est $Id_E - p$.

Proposition 2.1 Soit p une projection vectorielle sur l'espace euclidien E . Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. La projection p est une projection orthogonale.
2. Pour tous vecteurs x et y de E , on a l'égalité :

$$(p(x) | y) = (x | p(y)).$$

3. La matrice de p dans toute base orthonormée est symétrique.
4. La matrice de p dans une base orthonormée est symétrique.

Démonstration :

1. $1. \Rightarrow 2.$ On suppose que p est un projecteur orthogonal, c'est-à-dire $p^2 = p$ et $\ker p = (\operatorname{Im} p)^\perp$.
soit $(x, y) \in E^2$, on a :

$$(p(x) | y) = (p(x) | y - p(y)) + (p(x) | p(y)) = (p(x) | p(y)),$$

puisque $p(x) \in \operatorname{Im} p$ et $y - p(y) \in \ker p$. De même :

$$(x | p(y)) = (x - p(y) | p(y)) + (p(y) | p(y)) = (p(x) | p(y)).$$

D'où : $(x | p(y)) = (p(x) | y)$.

2. $2. \Rightarrow 1.$ On suppose : $\forall (x, y) \in E$, $(x | p(y)) = (p(x) | y)$. On a pour tout $(x, y) \in \ker p \times \operatorname{Im} p$, $(x | y) = (x | p(y)) = (p(x) | y) = (0 | y) = 0$, et donc p est un projecteur orthogonal.
3. $2. \Rightarrow 3.$ Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée et $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} = M(p, \mathcal{B})$. Alors $p(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$ et $a_{ij} = (e_i | p(e_j)) = (p(e_i) | e_j) = a_{ji}$, donc A est une matrice symétrique.
4. $3. \Rightarrow 4.$ évident.
5. $4. \Rightarrow 1.$ Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Alors $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $\forall y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, on a :

$$\begin{aligned} (x | p(y)) &= \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \mid \sum_{j=1}^n y_j p(e_j) \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \mid \sum_{j=1}^n y_j \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \left(e_i \mid \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j a_{ij} = (p(x) | y). \end{aligned}$$

□

Définition 2.3 Soit F un sous-espace vectoriel de E , $x \in E$. On appelle distance de x à F , et on note $d(x, F)$, le réel défini par :

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

Proposition 2.2 Soient F un sous-espace vectoriel de E , $x \in E$, on a :

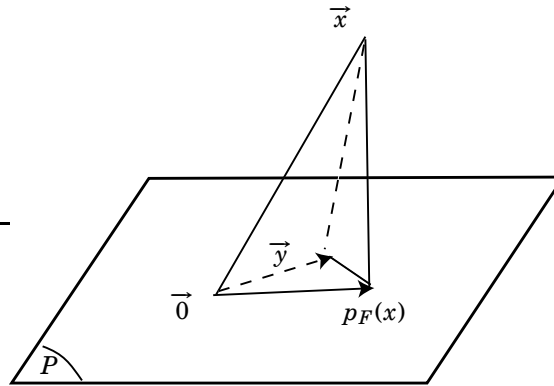
1. $\forall y \in F, \|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|$.
2. $\forall y \in F, \|x - y\| = \|x - p_F(x)\| \iff y = p_F(x)$.

Démonstration :

Il suffit de remarquer que pour tout $y \in F$:

$$\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x) + p_F(x) - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2$$

puisque $x - p_F(x) \in F^\perp$ et $p_F(x) - y \in F$. □



Remarque : On déduit, d'après la proposition, que $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.

2.3 Formes linéaires et hyperplans

Soit E un espace euclidien et a un vecteur de E . On définit l'application $\varphi_a : x \mapsto (x|a)$.

Théorème 2.2 (de la représentation) l'application $a \mapsto \varphi_a$ est un isomorphisme de E sur son dual E^* .

Démonstration : $\forall \in E$, l'application $x \mapsto \varphi_a(x)$ est bien une forme linéaire, donc $\varphi_a \in E^*$ et par conséquent l'application $a \mapsto \varphi_a$ est bien définie.

L'application $a \mapsto \varphi_a$ est injective, en effet,

$$\varphi_a = 0 \iff \varphi_a(x) = 0 \iff (a|x) = 0 \forall x \in E \iff x = 0$$

$\dim E^* = \dim E$ implique $a \mapsto \varphi_a$ est surjective, donc $\forall l \in E^*$, il existe un seul élément de E tel que $l = \varphi_a$.

Autrement dit : Toute forme linéaire l d'un espace vectoriel euclidien s'écrit d'une manière unique sous la forme $l(x) = (x|a), \forall x \in E$. □

3 Orientation. Produit vectoriel

3.1 Orientation d'un espace euclidien

Définition 3.1 Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace euclidien de dimension n . On dit que les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont de même orientation lorsque $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$.

C'est-à-dire $\det P > 0$ avec P la matrice de passage $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Orienter l'espace E c'est, une base étant fixée, convenir que les bases qui ont même orientation sont les bases directes, et les autres sont les bases indirectes.

Remarque : Pour orienter un plan, on fixe un vecteur $w \notin P$ et les bases directes (u, v) de P sont celles pour lesquelles (u, v, w) est une base directe de E .

Définition 3.2 Le produit mixte sur E est le déterminant dans toute base orthonormale directe, on note $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ le produit mixte de $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$.

3.2 Produit vectoriel dans un espace euclidien orienté de dimension 3

Théorème et définition 3.1 Pour tout couple $(x, y) \in E^2$, il existe un unique vecteur $w \in E$ tel que :

$$\forall z \in E, [x, y, z] = (w|z)$$

Le vecteur w est appelé le produit vectoriel de x et y , noté $x \wedge y$.

Démonstration : L'application $z \mapsto [x, y, z]$ est une forme linéaire sur, donc il existe, d'après le théorème de représentation, un unique vecteur w tel que

$$\forall z \in E, [x, y, z] = (w|z).$$

□

Propriétés :

1. On pour tous $x, y, z \in E$: $[x, y, z] = ((x \wedge y)|z)$, $[x, y, z] = [y, z, x] = ((y \wedge z)|x)$, $[x, y, z] = [z, y, x] = ((z \wedge y)|x)$.
2. Si (i, j, k) est une base orthonormée directe de E , alors : $i \wedge j = k$, $j \wedge k = i$ et $k \wedge i = j$.

Proposition 3.1 L'application $(x, y) \mapsto x \wedge y$ est une forme bilinéaire alternée.

Démonstration : Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y, y' \in E$.

- $\forall z \in E$, $((y \wedge x)|z) = [y, x, z] = -[x, y, z] = -((x \wedge y)|z)$, d'où par unicité de $x \wedge y$, on a : $x \wedge y = -(y \wedge x)$.
- $\forall z \in E$,

$$\begin{aligned} (x \wedge (\alpha y + y'))|z &= [x, \alpha y + y', z] \\ &= \alpha[x, y, z] + [x, y', z] \\ &= \alpha((x \wedge y)|z) + ((x \wedge y')|z) \\ &= ([\alpha(x \wedge y) + x \wedge y']|z) \end{aligned}$$

d'où par unicité de $x \wedge (\alpha y + y')$: $x \wedge (\alpha y + y') = \alpha(x \wedge y) + x \wedge y'$.

- La linéarité par rapport à la première variable résulte de la linéarité de la deuxième variable et de l'alternance.

□

Proposition 3.2 $\forall (x, y) \in E^2$, $x \wedge y = 0 \iff \{x, y\}$ est liée.

Démonstration : • si x et y est liée, alors $x \wedge y = 0$.

- Réciproquement, supposons $x \wedge y = 0$, si $\{x, y\}$ est libre, il existe $z \in E$ tel que $\{x, y, z\}$ soit une base de E et alors $(x \wedge y|z) = [x, y, z] \neq 0$, contradiction. Donc la famille $\{x, y\}$ est liée.

□

Corollaire 3.1 Si $\{x, y\}$ est libre, alors $\{x, y, x \wedge y\}$ est une base directe de E .

Démonstration : En effet, $[x, y, x \wedge y] = ((x|y)|(x|y)) = \|x \wedge y\|^2 > 0$.

□

Proposition 3.3 Soient $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de E , $u, v \in E$, (x, y, z) (resp. (x', y', z')) les composantes de u (resp. v) dans B , on a :

$$u \wedge v = (yz' - y'z)\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}.$$

Démonstration : C'est immédiate, on peut retenir ce résultat sous la forme schématique :

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} x & x' & \vec{i} \\ y & y' & \vec{j} \\ z & z' & \vec{k} \end{vmatrix}.$$

□

Proposition 3.4 $\forall (u, v, w) \in E^3$, $(u \wedge (v \wedge w)) = (u|w)v - (u|v)w$.

Démonstration :

- Si $v = 0$, la propriété est immédiate.
- Si $v \neq 0$ et si w est colinéaire à v , il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $w = \lambda v$, d'où :

$$(u|w)v - (u|v)w = \lambda(u|v)v - \lambda(u|v)v = 0 = u \wedge (v \wedge w).$$

- Si (v, w) libre, il existe une base orthonormée directe (I, J, K) et $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} v = \alpha I \\ w = \beta I + \gamma J \\ u = aI + bJ + cK \end{cases}$$

(d'après le procédé d'orthonormalisation de Schmidt). On a alors : $v \wedge w = \alpha\gamma K$, d'où $u \wedge (v \wedge w) = -a\alpha\gamma J + a\gamma bI$ et $(u|w)v - (u|v)w = b\gamma\alpha I - a\alpha\gamma J$. D'où la formule demandée.

□

Proposition 3.5 $\forall u, v \in E, \|u \wedge v\|^2 + (u|v)^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$. (**Identité de LAGRANGE**).

Démonstration : En effet, d'après la dernière proposition, on a :

$$\begin{aligned} \|u \wedge v\|^2 &= ((u \wedge v)|(u \wedge v)) = [u, v, u \wedge v] = [v, u \wedge v, u] \\ &= (v \wedge (u \wedge v)|u) = (((v|v)u - (v|u)v)|u) \\ &= (v|v)(u|u) - (v|u)(u|v) = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u|v)^2. \end{aligned}$$

□

.....