Chapitre 22
ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS

(2) AUTOMORPHISMES ORTHOGONAUX

Mohamed TARQI

Table des matières

•••••••••••

Dans ce chapitre E est un espace vectoriel euclidien de dimension n.

1 Automorphismes orthogonaux

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1 *Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire $(.|.)$. Un endomorphisme de E est dit orthogonal si, et seulement si, :*

$$\forall (x,y)\in E^2,\ \ (f(x)|f(y)) = (x|y).$$

Proposition 1.1 **Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire $(.|.)$. Un endomorphisme de E est orthogonal si, et seulement si, s'il conserve la norme, c'est-à-dire :**

$$\forall x\in E,\ \ \| f(x) \| = \| x \| .$$

Démonstration : Soit f un endomorphisme orthogonal de E, alors

$$\forall x\in E,\ \ \|f(x)\|^2 = (f(x)|f(x)) = (x|x) = \|x\|^2.$$

Donc f conserve la norme.

Réciproquement, d'après la formule de polarisation, pour tout $(x,y)\in E^2$, on a :

$$\begin{aligned}(f(x)|f(y)) &= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2)\\ &= \frac{1}{2}(\|f(x+y)\|^2+\|f(x-y)\|^2)\\ &= \frac{1}{2}(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2)\\ &= (x|y)\end{aligned}$$

Donc f est endomorphisme orthogonal. □

Corollaire 1.1 **Si f est un endomorphisme orthogonal, alors f est bijective.**

Démonstration : En effet :

$$\forall x\in E,\ \ f(x)=0\Longrightarrow \|f(x)\|=\|x\|=0\Longrightarrow x=0.$$

Donc $\ker f=\{0\}$ et comme E est de dimension finie f est bijectif. Donc un endomorphisme orthogonal est nécessairement un automorphisme : on dit automorphisme orthogonal. □

Exemples :

1. Id et $-Id$ sont des automorphismes orthogonaux.
2. Une symétrie orthogonale par rapport à F est un automorphisme orthogonal, en effet, si $x=y+z$, avec $y\in F$ et $z\in F^\perp$, on a :
$$\|s(x)\|^2=\|y-z\|^2=\|y\|^2+\|z\|^2=\|y+z\|^2=\|x\|^2$$
3. Par contre une projection orthogonale sur un sous-espace strict de E n'est pas un automorphisme orthogonale, car elle ne conserve pas la distance.

Proposition 1.2 **Soit E une espace euclidien et $\mathscr{B}=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ une base orthonormée de E. Un endomorphisme f de E est orthogonal si, et seulement si, $f(\mathscr{B})=\{f(e_1),f(e_2),\dots,f(e_n)\}$ est une base orthonormée.**

Démonstration : Si f est un automorphisme orthogonal, il conserve la norme et le produit scalaire, donc aussi l'orthogonalité, alors :

$$\forall i,j\in[1,n]^2,\ \ (f(e_i)|f(e_j))=(e_i|e_j)=\delta_{ij},$$

donc $\{f(e_1),f(e_2),\dots,f(e_n)\}$ est une famille orthonormée, comme elle a n éléments, c'est une base.
Réciproquement, supposons que $f(B)=\{f(e_1),f(e_2),\dots,f(e_n)\}$ est une base de E. Pour tout $x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\dots+\xi_ne_n$ de E, $f(x)=\xi_1f(e_1)+\xi_2f(e_2)+\dots+\xi_nf(e_n)$, donc

$$\|x\|=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\dots+\xi_n^2}=\|f(x)\|$$

donc f conserve la norme, il est donc orthogonal. □

Proposition 1.3 **Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Un endomorphisme f de E est orthogonale si, et seulement si, l'image par f de $\mathscr{B}$ est une base orthonormée.**

Démonstration : L'image d'une base orthonormée est donc une une famille orthonormée, et une base car f est un automorphisme.
Soit $B=\{e_1e_2,\dots,e_n\}$ et $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$ un vecteur de E. On a :

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

De plus $f(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$ et comme $f(\mathscr{B})$ est orthonormée, on a :

$$\|f(x)\|^2=\sum_{i=1}^{n} x_i^2=\|x\|^2.$$

L'endomorphisme f conserve la norme est donc orthogonal. □

Proposition 1.4 **L'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E est un sous-groupe de $\mathscr{GL}(E)$, appelé groupe orthogonal de E et noté $\mathscr{O}(E)$.**

Démonstration : id_E est un endomorphisme orthogonal ; la composée de deux endomorphismes orthogonaux de E est un endomorphisme orthogonal ; l'inverse d'un endomorphisme orthogonal est un endomorphisme orthogonal. □

1.2 Matrices orthogonales

Définition 1.2 *On dit qu'une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A\,{}^tA=I_n$.*

Remarque : A est orthogonale si elle est inversible et son inverse égal à sa transposée.
Soit E une espace vectoriel euclidien et $\mathscr{B}=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ une base de E et $f\in\mathscr{O}(E)$.
Soit

$$A=M(f,\mathscr{B})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n}\\ . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & .\\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn}\end{pmatrix}$$

Comme f est orthogonal, les vecteurs colonnes de A, $\{C_1,C_2,\dots,C_n\}$ forme une famille orthonormale, c'est-à-dire

$$\forall (i,j)\in[1,n]^2,\quad {}^tC_iC_j=\delta_{ij}$$

donc ${}^tAA=A\,{}^tA=I_n$ ou encore ${}^tA=A^{-1}$.
Donc la matrice d'un endomorphisme orthogonal est une matrice orthogonale.
On déduit facilement le résultat suivant :

Proposition 1.5 **L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n est un sous-groupe de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$, appelé groupe orthogonal d'ordre n et noté $\mathscr{O}(n)$.**

Exemple : La matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée est une matrice orthogonale.
Soit A une matrice orthogonale d'ordre n. Alors l'égalité ${}^tAA=I_n$ implique $\det A^2=1$, c'est-à-dire $\det A=\pm 1$.

Théorème 1.1 **L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n dont le déterminant est égal à 1 est un sous-groupe de $\mathscr{O}(n)$, appelé groupe spécial orthogonal d'ordre n et noté $\mathscr{SO}(n)$, ses éléments sont appelés des rotations.**

Démonstration : En effet, il suffit de vérifier que $\mathscr{SO}(n)=\ker\varphi$, avec :

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \mathscr{O}(n) & \longmapsto & \{-1,+1\}\\ & A & \longmapsto & \det A\end{array}$$

□

1.3 Symétries et réflexions

Proposition 1.6 **Une symétrie est un automorphisme orthogonal si, et seulement si, c'est une symétrie orthogonale.**

Démonstration :

1. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Supposons $s \in \mathscr{O}(E)$.
$$\forall (x,y) \in F \times G, \quad (x|y) = (s(x)|s(y) = (x|-y) = -(x|y)$$
d'où $(x|y) = 0$, donc F et G sont orthogonaux et supplémentaires, donc s est une symétrie orthogonale.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E et s la symétrie orthogonale par rapport à F. Pour tout x et y de E, on peut écrire $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ avec $(x_1, y_1) \in F^2$ et $(x_2, y_2) \in (F^\perp)^2$, donc :
$$(x|y) = (x_1 + x_2|y_1 + y_2) = (x_1|y_1) + (x_2|y_2)$$
$$(s(x)|s(y)) = (x_1 - x_2|y_1 - y_2) = (x_1|y_1) + (x_2|y_2)$$
donc s conserve le produit scalaire ; c'est un automorphisme orthogonal.

□

Définition 1.3 *On appelle réflexion une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.*

Remarque : Une réflexion est un automorphisme orthogonal de déterminant -1.

Définition 1.4 *Soit E un espace vectoriel euclidien et f un automorphisme orthogonal de E. L'ensemble des vecteurs de E invariants par f est le sous-espace vectoriel $F = \ker(f - id_E)$).*

Proposition 1.7 **Un automorphisme orthogonal dont l'ensemble des vecteurs invariants est un hyperplan H est la réflexion par rapport à H.**

Démonstration : Le sous-espace $H^\perp$ est une droite vectorielle, la restriction de f à $H^\perp$ est un automorphisme orthogonal de $H^\perp$, distinct de $id_{H^\perp}$ (sinon, l'ensemble des vecteurs invariants par f serait E tout entier), donc $f_{H^\perp} = -id_{H^\perp}$. Pour tout $x \in E$, $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in H$ et $x_2 \in H^\perp$, $f(x) = x_1 - x_2$: f est la réflexion par rapport à l'hyperplan H. □

2 Classifications des automorphismes orthogonaux du plan

Lemme 2.1 **Soit f un endomorphisme orthogonal de E et F l'ensemble des vecteurs de E invariants par f. Alors $F^\perp$ est stable par f.**

Démonstration : On a : $\forall x \in F^\perp, \forall y \in F, \quad (f(x)|y) = (f(x)|f(y)) = (x|y) = 0$, donc $f(x) \in F^\perp$ et par conséquent $f(F^\perp) \subset F^\perp$. □

Remarque : La restriction de f à $F^\perp$ est un automorphisme orthogonal de $F^\perp$.

Proposition 2.1 **Un automorphisme orthogonal dont l'ensemble des vecteurs invariants est un hyperplan H est la réflexion par rapport à H.**

Démonstration : Le sous-espace $H^\perp$ est une droite. La restriction de f à $H^\perp$ est automorphisme orthogonal de $H^\perp$, distinct de $id_{H^\perp}$. C'est nécessairement $-id_{H^\perp}$. Pour tout $x \in E$ se décomposant en $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in H$, $x_2 \in H^\perp$, $f(x) = x_1 - x_2$: f est la réflexion par rapport à l'hyperplan H. □

2.1 Automorphismes orthogonaux du plan

Soit E un espace euclidien de dimension 2, f un automorphisme de E. On pose $F = \ker(f - id_E)$ l'ensemble des vecteurs invariants par f.

1^{er} cas : Si $\dim E = 2$, alors $F = E$, donc $f = id_E$.

2^e cas : Si $\dim E = 1$, alors F est un droite vectorielle, c'est-à-dire un hyperplan de E, f est une réflexion de E par rapport à la droite F.

3^e cas : Si $\dim E = 0$, alors $F = \{0\}$. Soit a un vecteur non nul de E et s la réflexion par rapport à la médiatrice de $[a, f(a)]$. L'automorphisme $s \circ f$ laisse a invariant ; comme ce n'est pas l'identité de E, il s'agit d'une réflexion s', donc $f = s^{-1} \circ s' = s \circ s'$. f est la composée de deux réflexions. Pour tout x de E, l'angle orienté $(x, f(x))$ est le double de l'angle des axes des deux réflexions c'est une constante θ : f est la rotation vectorielle d'angle θ. (figure 1.)

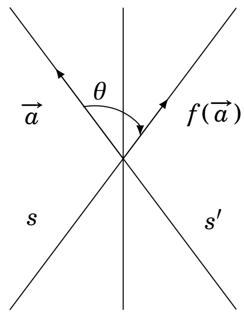

FIGURE 1: $f = s \circ s'$

D'où le théorème :

Théorème 2.1 **Les automorphismes orthogonaux du plan euclidien sont les rotations et les réflexions.**

Corollaire 2.1 **Les réflexions engendrent $\mathcal{O}(E)$.**

Démonstration : En effet, toute automorphisme orthogonal du plan est la composée d'au plus deux réflexions. □

2.2 Matrices orthogonales d'ordre 2 : $\mathcal{O}(2)$

Proposition 2.2

1. **Les matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont de la forme :**
$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ et } S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$
2. **Le groupe $\mathcal{SO}(2)$ est l'ensemble des matrices $R(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.**

Démonstration : 1. Si $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale, alors ses colonnes sont normées, donc $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ ce qui preuve l'existence de deux réels θ et φ tels que :
$$(a, b) = (\cos\theta, \sin\theta) \text{ et } (c, d) = (\sin\varphi, \cos\varphi)$$
L'orthogonalité des colonnes nous donne alors $\sin(\theta + \varphi) = 0$ c'est-à-dire $\varphi = -\theta[\pi]$. Les matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont donc :
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}.$$
2. C'est une conséquence de $\det R(\theta) = +1$ et $\det S(\theta) = -1$. □

Remarque :

Proposition 2.3

1. **Pour $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, on a : $R(\theta + \theta') = R(\theta)R(\theta')$.**
2. **Le groupe $(\mathcal{SO}(2), .)$ est commutatif.**
3. **L'application : $\theta \longrightarrow R(\theta)$ est un morphisme surjectif de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathcal{SO}(2), .)$ dont le noyau est $2\pi\mathbb{Z}$.**

Démonstration :

1. Il suffit d'effectuer les produits :

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta' & -\sin\theta'\\ \sin\theta' & \cos\theta'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta')\\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta')\end{pmatrix}.$$

2. On a évidement $R(\theta)R(\theta')=R(\theta+\theta')=R(\theta')R(\theta)$.
3. C'est évident et on a :

$$R(\theta)=I_2 \Longleftrightarrow (\cos\theta,\sin\theta)=(1,0)\Longleftrightarrow \theta=0[2\pi].$$

□

3 Classifications des automorphismes orthogonaux de l'espace

3.1 Automorphismes orthogonaux de l'espace

Théorème 3.1 **Tout automorphisme orthogonal de l'espace est la composée d'au plus trois réflexions, c'est-à-dire les réflexions engendrent $\mathcal{O}(E)$.**

Démonstration : Soit E un espace euclidien de dimension 3 orienté et f un automorphisme orthogonal de E. Posons $F=\ker(f-id_E)$ l'ensemble des vecteurs invariants par f.

1. Si $\dim F=3$, alors $F=E$ et $f=id_E$.
2. Si $\dim F=2$, F est un plan, c'est-à-dire un hyperplan de E, f est donc la réflexion par rapport à F. Son déterminant est -1.
3. Si $\dim F=1$, F est une droite, $F^\perp$ est un plan, la restriction de f à $F^\perp$ est un automorphisme orthogonal de $F^\perp$ qui n'a pas de vecteurs invariants non nuls : c'est donc une rotation du plan $F^\perp$, composée de deux réflexions d'axe D_1 et D_2 dans le plan $F^\perp$. Donc f est la composée des réflexions de l'espace par rapport au plans D_1+F et D_2+F. Elle appelée rotation d'axe F. Son déterminant est $+1$.
4. Si $\dim F=0$, $F=\{0\}$. Soit a un vecteur non nul de E, s la réflexion par rapport au plan médiateur de $[a,f(a)]$. L'automorphisme orthogonal $s\circ f$ laisse fixe a, comme ce n'est pas l'identité ni une réflexion, c'est nécessairement une rotation, c'est-à-dire la composée de deux réflexions. Donc f est la composée de trois réflexions ; son déterminant -1.

□

3.2 Matrices orthogonales d'ordre 3 : $\mathcal{O}(3)$

D'après l'étude précédente, il existe quatre types d'automorphismes orthogonaux, soit f un tel automorphisme de E, nous allons donner la matrice de f dans une base orthonormée convenablement choisie.

1. Si f est l'identité, alors la matrice de f une base quelconque est I_3.
2. Si f est la rotation d'axe $D=vect(e_1)$, avec e_1 unitaire, et d'angle θ (relativement à l'orientation de D par le vecteur e_1), on complète e_1 en une base orthonormée $B=\{e_1,e_2,e_3\}$. La matrice de f dans cette base est

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

3. Si f est la réflexion de plan P, on complète une base orthonormée $\{e_1,e_2\}$ de P en une base orthonormée $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ de E. Dans cette base la matrice de f s'écrit :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

4. Si f est la composée de la réflexion de plan P et de la rotation d'axe $P^{\perp}$ de vecteur unitaire e_1 et d'angle θ (relativement à l'orientation de $P^{\perp}$ par le vecteur e_1), on complète e_1 en une base orthonormée directe $B = \{e_1, e_2, e_3\}$. La matrice de f dans cette base est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

□

Remarque : On remarque que

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ce qui permet de voir que f est la composée d'une réflexion et d'une rotation.

Proposition 3.1 **Soit f une rotation d'angle θ autour d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{w}$.**

1. **Si $\overrightarrow{x}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{w}$, on a :**

$$f(\overrightarrow{x}) = \cos\theta\overrightarrow{x} + \sin\theta\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{x}$$

2. **Si $\overrightarrow{x}$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{w}$, on a :**

$$\cos\theta = \overrightarrow{x}.f(\overrightarrow{x}) \text{ et } \sin\theta = \det(\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{w}).$$

Démonstration : 1. Il suffit de le montrer dans le cas où $\overrightarrow{w}$ est normé. Dans le plan $P = [\text{Vect}(\overrightarrow{w})]^{\perp}$ orienté par $\overrightarrow{w}$, on peut compléter $\overrightarrow{x}$ en une base orthonormée $\{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\}$. Comme la restriction à P de la rotation f est la rotation d'angle θ, on en déduit :

$$f(\overrightarrow{x}) = \cos\theta\overrightarrow{x} + \sin\theta\overrightarrow{y}$$

ce qui donne le résultat, puisque $\{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{w}\}$ étant une base orthonormée directe, on a : $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{x}$.
2. Conséquence du résultat précédent et de la relation

$$\det(\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{w}) = \det(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x})) = (\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{x}).f(\overrightarrow{x}).$$

□

Détermination des éléments caractéristiques d'une rotation vectorielle de E.

1. L'axe de rotation est obtenu en résolvant le système $AX = X$.
2. On détermine θ par :
   (a) $\operatorname{tr} A = 1 + \cos\theta$.
   (b) $\sin\theta$ est du signe du produit mixte $[\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{w}]$ pour n'importe quel vecteur $\overrightarrow{x}$ non colinéaire à I, où I est le vecteur normé dirigeant et orientant l'axe de f.

3.3 Exemples d'applications

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

C'est une rotation car ses vecteurs colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et $\det A = 1$.
On détermine l'axe en résolvant le système $AX = X$, ce qui donne $D = \text{Vect}(\overrightarrow{w})$, avec $\overrightarrow{w} = \frac{1}{\sqrt{11}}(1,1,3)$.
Choisissons un vecteur $\overrightarrow{x}$ orthogonal à $\overrightarrow{w}$, par exemple $\overrightarrow{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, donc $f(\overrightarrow{x}) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-1,4,-1)$ et l'angle de rotation autour de $\overrightarrow{w}$ est donc caractérisé par les relations :

$$\cos\theta = \overrightarrow{x}.f(\overrightarrow{x}) = \frac{-5}{6} \text{ et } \sin\theta = \det(\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{w}) = \frac{\sqrt{11}}{6} > 0.$$

Donc f est la rotation d'axe dirigé et orienté par $\overrightarrow{w} = \frac{1}{\sqrt{11}}(1,1,3)$ et d'angle $\theta = \arccos(-\frac{5}{6})[2\pi]$.

2.
$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

On a ${}^tAA = I_3$, donc A est orthogonale. Comme, de plus, $\det A = 1$, f est une rotation.
On remarque que A est symétrique, donc ${}^tAA = A^2 = I_3$, donc f est une symétrie.
Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a : $AX = X \Longrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 4z \end{cases}$. Finalement, f est le retournement autour de la droite $\text{Vect}(\overrightarrow{e})$ avec $\overrightarrow{e} = (1,4,1)$.

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est
$$A = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

${}^tAA = I_3$ implique A est orthogonal et $\det A = -1$ entraîne A n'est pas symétrique. Don f est la composée commutative d'une rotation d'axe $\overrightarrow{D}$, d'angle θ et de la réflexion par rapport au plan orthogonal à D.
La résolution du système $AX = X$ donne $\overrightarrow{D} = \text{Vect}\,\frac{1}{\sqrt{11}}(1,1,3) = \text{Vect}\,\overrightarrow{I}$.
On a $-1 + \cos\theta = \text{tr}A = \frac{2}{3}$, donc $\cos\theta = \frac{5}{6}$.
De plus, $\sin\theta$ est du signe de $\det(\overrightarrow{i}, f(\overrightarrow{i}), \overrightarrow{I}) = \frac{-5}{3\sqrt{11}} < 0$, donc $\theta = -\arccos\frac{5}{6}[2\pi]$.
Finalement, f est la composée commutative de la rotation d'axe dirigé et orienté par $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ et d'angle $-\arccos\frac{5}{6}[2\pi]$ et de la réflexion par rapport au plan d'équation $x + y + 3z = 0$.

••••••••••