Chapitre 23
Séries numériques

Mohamed TARQI

Table des matières

• • • • • • • • • • •

Dans ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Convergence d'une série

1.1 Généralités

Définition 1.1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On appelle série de terme général u_n, et on note $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ définie par :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

S_n est appelée somme partielle d'ordre n de la série.

Lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$ la limite $S = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S_n$, est appelée somme de la série de terme général u_n, et on écrit symboliquement :

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k.$$

Lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge on dit que la série de terme général u_n est divergente.
Deux séries sont dites de même nature si, et seulement si, elles sont convergentes ou toutes deux divergentes.

Remarques :

1. Le symbole $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ n'a pas de sens que si l'on sait que la série est convergente.
2. Si le terme général u_n n'est défini qu'à partir d'un certain rang n_0, on dira que la série est convergente si, et seulement si, la suite de terme général $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$ possède une limite.

Notations :

1. "$\sum u_n\ CV$" pour " la série de terme général u_n est convergente".
2. "$\sum u_n\ DV$" pour " la série de terme général u_n est divergente".

Proposition 1.1 **On ne change pas la nature de la série $\sum u_n$ en modifiant un nombre fini de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**

Démonstration : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$ telle que $u_n = v_n$, pour $n \geq n_0$. On alors, en notant $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, et $V_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$.

$$\forall n \geq n_0,\ \ U_n - V_n = \sum_{k=0}^{n} (u_k - v_k)$$

la différence $U_n - V_n$ étant constante à partir de n_0, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, s'il en est de même de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dans le cas de convergence, on alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} U_k - \sum_{k=0}^{\infty} V_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k - \sum_{k=0}^{n_0-1} v_k.$$

□

Définition 1.2 *Si $\sum u_n$ est une série convergente de somme S, on appelle reste d'ordre n de cette série la différence.*

$$r_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = S - \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Donc

$$r_n = \lim_{m\longrightarrow+\infty} \sum_{k=O}^{m} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

1.2 Condition nécessaire de convergence d'une série

Proposition 1.2 **Si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = 0$**

Démonstration : On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = S_n - S_{n-1}$, dons si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. □

Remarque : Cette condition n'est pas suffisante pour assurer la convergence d'une série, en effet, soit la série de terme général $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$.
On a : $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = 0$, mais la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_n = \sum_{k=1}^{n} [\ln(n+1) - \ln(n)] = \ln(n+1)$$

tend vers $+\infty$.
Lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement, par exemple $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n$ diverge grossièrement.

Exemples :

1. (**Série géométrique**) Soit $a \in \mathbb{C}$, étudions la série de terme général $u_n = a^n$.
   - Si $a = 1$, $\sum\limits_{k=0}^{n} a^n = n+1$, suite qui diverge.
   - Si $a \neq 1$, on a :

   $$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

   – Si $|a| < 1$, on a $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a^{n+1} = 0$ et la série et convergente, de somme

   $$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}.$$

   – Si $|a| \geq 1$, on a $|S_n - S_{n-1}| = |a| \geq 1$, ce qui montre que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas être convergente.
2. (**Série harmonique**) La série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$ est divergente, en effet, supposons que la série $\sum \frac{1}{k}$ CV, alors la suite $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, admet une limite, mais

   $$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

   On aura une contradiction par passage à la limite.

Proposition 1.3 **La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, la série de terme général $u_n - u_{n+1}$ est convergente.**

Démonstration : En effet, la somme des n premiers termes de la série $\sum\limits_{n\geq 0}(u_n - u_{n+1})$ est

$$S_n = u_0 - u_1 + u_1 - u_2 + \dots + u_n - u_{n+1} = u_0 - u_{n+1}.$$

Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite si, et seulement si, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite. □

Exemples :

1. Soit $u_n = \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$ $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = 0$, la série $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty}(u_n - u_{n+1}) = \sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n(n+1)}$ est donc convergente. On a :

   $$\sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

   donc la somme de la série est $1 - \lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\dfrac{1}{n+1} = 1$.

2. Soit $u_n = \arctan\frac{1}{n}$, $n \geq 1$ $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = 0$, donc la série $\sum\limits_{n\geq 1}(u_n - u_{n+1})$ est convergente et comme

   $$\begin{aligned}
   \arctan 1 - \arctan\frac{1}{n+1} &= \sum_{n=1}^{n}(u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n}\left(\arctan\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k+1}\right)\\
   &= \sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}}{1+\frac{1}{k}\frac{1}{k+1}}\\
   &= \sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{k^2+k+1}
   \end{aligned}$$

   sa somme vaut $\arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$.
   Donc

   $$\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7} + \dots + \arctan\frac{1}{n^2+n+1} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

Remarque : **La méthode précédente peut se généraliser. Supposons par exemple qu'il existe une fonction f telle que :**

$$u_n = af(n) + bf(n+1) + cf(n+2)$$

avec $a+b+c=0$.
On obtient

$$u_n = a[f(n) - f(n+1)] + c[f(n+2) - f(n+1)]$$

et donc

$$S_n = c[f(n+2) - f(2)] - a[f(n+1) - f(1)]$$

dont il ne reste plus qu' à étudier la limite.
Soit, par exemple

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Utilisons la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples pour écrire :

$$u_n = \frac{1}{2}\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+2}.$$

Il vient

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1} - 1\right]$$

qui tend vers $\frac{1}{4}$.

Théorème 1.1 *(Critère de Cauchy)* **La série de terme général u_n est convergente si, et seulement si,**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}, \quad |u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| \leq \varepsilon$$

Démonstration : La série de terme général u_n est convergente si, et seulement si, la suite de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ converge, donc est une suite de Cauchy et par conséquent

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}, \quad |S_{n+p} - S_{n-1}| \leq \varepsilon$$

ou encore

$$|u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| \leq \varepsilon.$$

□

Exemple : La série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ est divergente puisque $\forall n \geq 1$, $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$.

Proposition 1.4 **L'ensemble $S(\mathbb{K}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \sum u_n \;\; CV\}$ est sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et l'application**

$$\varphi : \begin{array}{ccl} S(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \sum_{n=0}^{\infty} u_n \end{array}$$

est un morphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $S(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} (u_k + \lambda v_k) = \sum_{k=0}^{n} u_k + \lambda \sum_{k=0}^{n} v_k$$

ce qui entraîne que la série $\sum_{n\geq 0} (u_n + \lambda v_n)$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} v_n,$$

autrement dit φ est $\mathbb{K}$-linéaire. □

2 Séries à termes positifs

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série de terme général u_n est donc croissante. Donc la série $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et dans ce cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

2.1 Comparaison des séries à termes positifs

2.1.1 Majoration. Domination. Équivalence

Théorème 2.1 **Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \le v_n$, alors :**

$$\sum v_n \ CV \Longrightarrow \sum u_n \ CV \text{ et } \sum u_n \ DV \Longrightarrow \sum v_n \ DV.$$

Démonstration : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \ge n_0$, $u_n \le v_n$. Alors

$$\forall n \ge n_0,\ \ U_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k \le V_n = \sum_{k=n_0}^{n} v_k$$

Si la série $\sum v_n$ converge, la suite $(V_n)_{n\ge n_0}$ est majorée, il est de même de la suite $(U_n)_{n\ge n_0}$.
Lorsque $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} U_n = +\infty$, il est de même de la suite $(V_n)_{n\ge n_0}$. □

Exemples :

1. Pour tout $n \ge 1$, on a : $\dfrac{1}{n} \le \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et donc la série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente.
2. Pour tout $n \ge 2$, on a : $\dfrac{1}{n^2} \le \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$ et $\sum_{k=2}^{n}(\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}) = 1 - \dfrac{1}{n}$, donc la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$converge.

Corollaire 2.1 **Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ avec $u_n = O(v_n)$ pour $n \longrightarrow \infty$, alors :**

$$\sum v_n \ CV \Longrightarrow \sum u_n \ CV.$$

Démonstration : Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{R}^+$ tels que $\forall n \ge n_0$, $0 \le u_n \le c v_n$.
Comme $\sum v_n$ converge, $\sum c v_n$ converge, puis $\sum u_n$ converge et donc $\sum u_n$ converge. □

Corollaire 2.2 **Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de $(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, s'il existe deux nombres réels positifs a et b tels que à partir d'un certain rang n_0, on a :**

$$a \le \frac{u_n}{v_n} \le b.$$

Alors les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration : Si la série $\sum v_n$ converge, $\sum b v_n$ converge et puisque $u_n \le b v_n$ pour $n \ge n_0$, il est de même pour la série $\sum u_n$.

Si la série $\sum v_n$ diverge, la série $\sum b v_n$ diverge et puisque $u_n \ge a v_n$, il est de même pour la série $\sum u_n$. □

Corollaire 2.3 **Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels, avec $v_n \ge 0$ à partir d'un certain rang n_0. Si $u_n \sim_\infty v_n$, alors les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.**

Démonstration : Montrons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $u_n \geq 0$. En effet, $u_n \sim_\infty v_n$ entraîne l'existence d'un entier N tel que $\forall n \geq N$, $|u_n - v_n| \leq v_n$ et donc $\forall n \geq N$, $0 \leq u_n \leq 2v_n$.
Puisque la relation d'équivalence est symétrique, on obtient alors $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$, le corollaire précédent permet de conclure. □

2.1.2 Comparaison logarithmique

Proposition 2.1 **Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes positifs, telles que à partir d'un certain rang**

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Alors

$$\sum v_n \ CV \Longrightarrow \sum u_n \ CV \text{ et } \sum u_n \ DV \Longrightarrow \sum v_n \ DV.$$

Démonstration : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, alors :

$$\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \ldots \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} = c.$$

Donc $\forall n \geq n_0$, $u_n \leq cv_n$ ou encore $u_n = O(v_n)$ et l'on se ramène au théorème précédent. □

Exemple : Soit la série $\sum u_n$ de terme général $u_n = \dfrac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{n^n}$, $n \geq 1$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4n+2}{(n+1)(1+\frac{1}{n})^n}$$

qui tend vers $\frac{4}{e}$.
À partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 = \dfrac{1^{n+1}}{1^n}$ et par conséquent la série $\sum u_n$ diverge.

2.2 Séries de Riemann

Il s'agit des séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, avec $n \geq 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On a déjà vu que cette série diverge pour $\alpha = 1$ et converge pour $\alpha = 2$, donc par application des résultats précédents, la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge pour $\alpha \in]0,1]$ et converge pour $\alpha \in [2,+\infty[$. Il reste à traiter le cas $\alpha \in]1,2[$.

Théorème 2.2 *(Série de Riemann* [1]*)* **La série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente pour $\alpha > 1$ et divergente pour $\alpha \leq 1$.**

Démonstration : Soit $\alpha > 1$, par application de l'inégalité des accroissements fini à $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$ sur l'intervalle $[n, n+1]$, on a :

$$\frac{\alpha-1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$$

La série $\sum\left(\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right)$ convergente ; puisque la suite $\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$ tend vers 0 et par conséquent la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge. □

1. Riemann(Bernhard), mathématicien allemand (Breselenz, Hanovre, 1826 Selasca, lac majore, 1866). Ces travaux, d'une profonde originalité, ont eu une influence durable, notamment sur la théorie des fonctions de variables complexes, sur la théorie de l'intégration et sur les fondements de la géométrie. Il établit également les bases de la topologie.

Exemple : Étudions la série $\sum u_n$ avec $u_n = e^{-(\ln n)^a}$, $n \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}$.

Soit $\alpha \geq 0$, $n^\alpha u_n = e^{\alpha \ln n} e^{-(\ln n)^a} = e^{\alpha \ln n - (\ln n)^a}$

- Si $a > 1$, $\forall \alpha > 0$, $\alpha \ln n - (\ln n)^a$ tend vers $-\infty$ et donc n^α tend vers 0, en particulier $n^2 u_n$ tend vers 0, donc :

$$\forall n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geq n_0,\ \ u_n \leq \frac{1}{n^2}$$

  et par suite la série $\sum u_n$ converge.
- Si $a = 1$, $u_n = \dfrac{1}{n}$, la série $\sum u_n$ diverge.
- Si $a < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-(\ln n)^a} \geq e^{-\ln n} = \dfrac{1}{n}$, donc la série $\sum u_n$ est divergente.

2.3 Comparaison avec une série géométrique : Règle de D'Alembert

Théorème 2.3 (Règle de D'Alembert[2]) **Soit la série $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose que la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $l \in \mathbb{R}^+$.**

1. **Si $l < 1$, alors $\sum u_n$ converge.**
2. **Si $l > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.**

Démonstration :

1. Supposons $l < 1$, soit $\lambda \in]l, 1[$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda$, ce qui entraîne :

$$\forall n \geq n_0,\ \ \frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \dots \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \leq \lambda^n$$

   ou encore,

$$\forall n \geq n_0,\ \ u_n \leq u_{n_0} \lambda^{n-n_0}$$

   Donc, puisque la série $\sum \lambda^n$ est convergente, la série $\sum u_n$ converge.
2. Si $l > 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n+1} \geq u_n$, ainsi la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante, et $\forall n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0} > 0$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, donc la série $\sum u_n$ diverge.

□

Remarque : Si $l = 1$ on peut rien dire, par exemple pour les séries $\sum \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{n}$, on a $l = 1$, alors que la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge et la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.

2.4 Comparaison à une intégrale

Théorème 2.4 **Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ un fonction continue par morceaux, positive et décroissante. On pose $u_n = f(n)$. Si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la série $\sum u_n$ est convergente. Si f n'est pas intégrable, alors la série $\sum u_n$ est divergente.**

2. Alembert (Jean le Rond d'), mathématicien et philosophe français (Paris 1717, Paris 1783). Sceptique en religion et en métaphysique, défenseur de la tolérance, il exposa, dans son Discours préliminaire de l'Encyclopédie, la philosophie naturelle et l'esprit scientifique qui présidaient à l'ouvre entreprise. Ces recherches de physique, mathématiques (problèmes des trois corps, précession des équinoxes, cordes vibrantes) l'amenèrent à étudier les équations différentielles et au dérivées partielles. Dans le "Traité de dynamique (1743)", son ouvre capitale, il énonce le théorème connue sous le nom de "Principe de de D'Alemebert". (Académie de sciences, Académie françaises)

Démonstration : $\forall p \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement :

$$f(p+1) \leq \int_p^{p+1} f(t)dt \leq f(p),$$

car f est décroissante. En notant $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, on obtient facilement

$$\int_0^{n+1} f(t)dt \leq S_n \leq f(0) + \int_0^n f(t)dt.$$

Il en résulte aisément que si F est bornée sur $\mathbb{R}_+$, il est de même de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De même si la série $\sum u_k$ converge, on a pour tout n, $F(n) \leq \sum_{k=0}^{\infty} u_k$, ce qui preuve l'intégrabilité de f, vu la croissance de F. □

Corollaire 2.4 **Sous les hypothèses du théorème précédent, et dans le cas ou $\sum f(n)$ diverge, la suite $\triangle_n = \int_0^n f(t)dt - \sum_{k=0}^{n} f(k)$ est monotone bornée, donc convergente.**

Démonstration : On a : $\triangle_{n+1} - \triangle_n = \int_n^{n+1} f(t)dt - f(n+1) \geq 0$ et donc la suite $(\triangle_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a de plus, d'après les encadrements obtenus précédemment

$$S_n \geq F(n+1) > F(n),$$

et donc $\triangle_n \leq 0$. La suite $(\triangle_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente. □

On peut résumer le théorème précédent et son corollaire dans le théorème suivant :

Théorème 2.5 **Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ un fonction continue par morceaux, positive et décroissante. La série de terme général $u_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt$ est convergente.**

Exemple : (CONSTANTE D'EULER [3])

La fonction $t \longmapsto \frac{1}{t}$ est décroissante non intégrable sur $[1,+\infty[$, la suite $\triangle_n = \int_1^n \frac{dt}{t} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est donc convergente, et on définit la constante d'Euler par :

$$\gamma^4 = \lim_{n\longrightarrow\infty} (1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}) - \ln n.$$

Corollaire 2.5 **Lorsque f est positive, intégrable sur $[a,+\infty[$, on a :**

$$\forall n \geq a, \quad \int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq R_n = \sum_{n+1}^{\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt$$

Démonstration : Si $n \geq a$, la fonction f étant décroissante sur $[n,+\infty[$, alors pour tout $k \geq n+1$, on a :

$$\int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt.$$

Il reste ensuite à sommer pour k variant entre $n+1$ et N et à faire tendre N vers l'infini. □

3. Euler(Leonhard), mathématicien suise (Bale 1707-Saint-Pétersbourg 1783). Il est le principal artisan de l'essor de l'analyse, au XVII^{e}s., qu'il réorganisa autour du concept fondamental de fonction. Il exerça sa puissance inventive dans tous les domaines de la physique mathématique.

4. Jusqu'à maintenant(26/11/2007), on ne connait pas si γ est rationnel ou non.

Exemple : Soit $f : t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha}$, $\alpha > 1$. On a l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq R_n \leq \int_{n}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

Donc $R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

3 Séries absolument convergentes

3.1 Séries absolument convergentes, semi-convergentes

Définition 3.1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente (en abrégé $\sum u_n$ CVA) si la série de terme général $|u_n|$ converge.*

Théorème 3.1 **Toute série absolument convergente est convergente.**

Démonstration : Il suffit de vérifier que la suite de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est une suite de Cauchy. En effet, on a , en notant $S'_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|$,

$$\forall m > n, \ \ |S_m - S_n| \leq S'_m - S'_n$$

ce qui permet de conclure. □

Remarque : La réciproque du théorème est fausse comme le montre l'exemple suivant : La série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n \geq 1$ est convergente puisque la suite $S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k-1)}$ est convergente (terme général équivalent à $\frac{1}{4k^2}$) et $S_{2n} - S_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$, mais la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Exemple : (SÉRIES EXPONENTIELLE) Soit $z \in \mathbb{C}$, considérons la série de terme général $\frac{z^n}{n!}$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{z^n}{n!}\right| \leq \frac{|z|^n}{n!}$ et que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!}$ est convergente d'après le règle de D'Alembert($\forall z \in \mathbb{C}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|z|^n}{n!}} = 0$), alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente, donc converge. D'où le théorème :

Théorème et définition 3.1 **Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge. On appelle exponentielle, et on note $\exp$ l'application définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $\forall z \in \mathbb{C}, \ \ \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.**

Définition 3.2 *On dit qu'une série est semi-convergente si elle converge sans converger absolument.*

Exemple : La série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est semi-convergente.

3.2 Séries alternées

Définition 3.3 *Une série $\sum u_n$ à terme réels est dite alternée si $(-1)^n u_n$ a un signe constant.*

Remarque : Quitte à multiplier le terme général par -1, on pourra donc supposer $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n |u_n|$

Théorème 3.2 *(Critère spécial des séries alternées)* **Toute série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers 0 est convergente.**

Démonstration : Il suffit de montrer que les deux suite suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En effet, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} = S_{2n} - |u_{2n+1}| \leq S_{2n},$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad S_{2n+2} - S_{2n} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leq 0$$

Donc $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, de même , la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} S_{2n} - S_{2n+1} = 0$$

ce qui permet de conclure. □

Remarques :

1. Sous les hypothèses du théorème précédent deux sommes partielles consécutives S_n et S_{n+1} encadrent la somme de la série et
$$|R_n| = |S - S_n| \leq |S_{n+1} - S_n| \leq |u_{n+1}|$$
avec $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.
2. Le signe de la somme d'une série alternée convergente est celui de son premier terme.

Exemple : Soit $\alpha > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ est une série absolument convergente pour $\alpha > 1$. Si $0 < \alpha \leq 1$, la série n'est absolument convergente, en effet, appliquons le théorème spécial aux séries alternées : $\frac{1}{n^\alpha}$ tend vers 0 en décroissant, la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ est convergente (semi-convergente). Pour le cas $\alpha = 1$, on montre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$. On a donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots - \frac{1}{2p} < \ln 2 < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots - \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p+1}.$$

••••••••••