Chapitre 24
PROBABILITÉS

Mohamed TARQI

Table des matières

• • • • • • • • • • •

1 Introduction

Lorsqu'un phénomène est déterminé par une loi connue, on peut utiliser cette loi pour faire des *prévisions*. Par exemple, considérons un point mobile sur une droite. Si nous choisissons un origine et un sens sur cette droite, à chaque instant le point est repéré par son abscisse.
Mathématiquement, le mouvement est donc représenté par une fonction :

$$f: \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & x = f(t) \end{array}$$

Par application de de cette loi, on peut *prévoir* et déterminer la position du mobile à chaque instant. Ce pendant toutes les situations ne sont pas aussi simples : par exemple, dans une partie de pile ou face, on ne peut pas dire à l'avance si c'est pile qui sortir ou si face. Un tel phénomène semble échapper à toute prévision. On dit qu'il est aléatoire.
L'objet des *probabilités* est d'étudier, d'un point de vue théorique les *phénomènes aléatoires*

2 Concepts de base des probabilités

2.1 Épreuve

Définition 2.1 *On dit qu'une expérience ou une épreuve est une experience aléatoire s'elle est répété dans les mêmes conditions conduit à des résultats différents, donc dans une expérience aléatoire, on ne sait pas d'avance le résultat.*

Exemples :

1. Soit l'épreuve " lancer une pièce de monnaie trois fois dans l'air ". On peut obtenir soit pile, soit face pour le premier cas, puis, soit pile, soit face pour le deuxième lancer, etc...
2. " Tirage d'une carte d'un jeu de 52 cartes "
3. Dans une urne on dépose sept boules rouges, quatre noires et deux boules vertes " On tire successivement deux boules sans les remettre dans l'urne "

2.2 Ensemble Ω des éventualités. Événements

Définition 2.2 *Considérons une expérience aléatoire. L'ensemble des éventualités associé à cette épreuve est l'ensemble des résultats possibles. On note cette ensemble* Ω

Exemples :

1. Considérons le jeu de la pièce lancée trois fois. On peut représenter toutes les possibilités à l'aide de l'arbre suivant :

   $1^{er} lancer$ P F

   $2^{e} lancer$ P F P F

   $3^{e} lancer$ P F P F P F P F

   Dans ce cas :
   $$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$$
2. Dans l'expérience " lancer deux fois d'un dé " l'ensemble des éventualités est $\Omega = [1,6]^2$.
3. Au jeu de la roulette qui contient 37 chiffres,0,1,2,...,36. L'espace des éventualités est :
   $$\Omega = \{n \in \mathbb{N}/0 \leq n \leq 36\}$$
4. L'espace des événements associé à l'épreuve " lancer d'une pièce de monnaie et d'un dé " est :
   $$\Omega = \{P, F\} \times [1,6]$$

Définition 2.3 *Soit Ω l'espace des éventualités associé à une épreuve et $\mathscr{P}(\Omega)$ l'ensemble de ses parties. Chaque élément de $\mathscr{P}(\Omega)$, c'est-à-dire chaque partie de Ω est appelé* ***événement.***

Exemples :

1. Dans le jeu de la pièce de monnaie lancée trois fois,l'événement " pile sort en premier " est
   $$\{PPP, PPF, PFP, PFF\}.$$
2. Au jeu de dé l'événement " résultat pair " est $\{2,4,6\}$.

<u>ÉVÉNEMENTS PARTICULIERS</u> :
∘ $\varnothing$ est dit événement impossible.
∘ Ω est dit événement certain.
∘ Deux événements A et B sont dits disjoints ou incompatibles si l'événement " A et B " est impossible, c'est à dire $A \cap B = \varnothing$.
∘ Chaque partie de Ω possédant un seul élément (un singleton) est appelé événement élémentaire, les événements élémentaires sont disjoints deux à deux.

Exemples : Dans le jeu de la pièce de monnaie lancée trois fois :

1. L'événement caractérisé par " sortir cinq fois pile " est impossible. De même l'événement " obtenir une fois pile et deux fois pile " est impossible.
2. Les événements " obtenir une fois pile " et obtenir deux fois pile " sont incompatibles.

3 Tribu et probabilité

3.1 Notion de tribu

Définition 3.1 *Soit Ω un ensemble et $\mathscr{F}$ un sous-ensemble de parties de Ω. On dit que $\mathscr{F}$ est une tribu si elle vérifie les 3 conditions suivantes :*

1. $\Omega \in \mathscr{F}$;
2. *si A appartient à $\mathscr{F}$, alors son complémentaire A^c appartient aussi à $\mathscr{F}$;*
3. *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{F}$, alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ appartient à $\mathscr{F}$.*

Le couple $(\Omega, \mathscr{F})$ est appelée espace mesurable ou encore espace probabilisable. Les éléments de $\mathscr{F}$ sont appelés des événements.

On vérifie sans problème à partir des trois axiomes ci-dessus que toute tribu $\mathscr{F}$ contient l'ensemble vide $\emptyset$, est stable par union finie, intersection finie ou dénombrable. Ainsi, on retiendra qu'une tribu est stable par combinaisons au plus dénombrables d'opérations usuelles sur les ensembles, bref par toutes les manipulations classiques.

Exemple : Voici trois exemples classiques de tribus :

- La tribu triviale : $\mathscr{F} = \{\emptyset, \Omega\}$;
- La tribu engendrée par une partie A de Ω : $\mathscr{F} = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$;
- La tribu pleine : $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$.

Remarque : **En pratique, lorsque Ω est fini ou dénombrable, on considère en général la tribu pleine $\mathscr{P}(\Omega)$.**

3.2 Probabilité

Définition 3.2 *Soit $(\Omega, \mathscr{F})$ un espace mésurable. Une probabilité p est une application de $\mathscr{F}$ dans $[0,1]$ qui vérifie :*

1. $p(\Omega) = 1$;
2. *pour toute famille au plus dénombrable d'événements deux à deux disjoints $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a $p(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} p(A_n)$.*

On appelle espace probabilisé le triplet $(\Omega, \mathscr{F}, p)$, si Ω est fini on dit que $(\Omega, \mathscr{F}, p)$ est un espace probabilisé fini.

Exemple : On lance une pièce de monnaie une fois. Ici $\Omega = \{P, F\}$. L'application :

$$p : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ P & \longmapsto & \frac{1}{2} \\ F & \longmapsto & \frac{1}{2} \end{array}$$

est une probabilité et $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$ est un espace probabilisé fini.
On déduit aisément les propriétés suivantes :

Proposition 3.1 **Soit $(\Omega, \mathscr{F}, p)$ un espace de probabilité. Alors on a les propriétés :**

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. **Pour tout $A \in \mathscr{F}$, $p(A^c) = 1 - p(A)$.**
3. **Pour tout $A, B \in \mathscr{F}$ tels que $A \subseteq B$, $p(A) \leq p(B)$.**
4. **Pour tout $A, B \in F$, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.**

Démonstration :

1. $\forall A, B \in P(\Omega)$, on a $A \cup B) = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$ et les trois parties $A - B$, $B - A$, $A \cap B$ sont deux à deux disjointes. On a donc :
$$p(A \cup B) = p(A - B) + p(B - A) + p(A \cap B).$$
D'autre part :
$$A = (A - B) \cup (A \cap B) \quad \text{et} \quad (A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$$
$$B = (B - A) \cup (A \cap B) \quad \text{et} \quad (B - A) \cap (A \cap B) = \varnothing$$
On a alors :
$$p(A) = p(A - B) + p(A \cap B)$$
$$p(B) = p(B - A) + p(A \cap B)$$
En portant les valeurs $p(A - B)$ et de $p(B - A)$ dans (1), on a :
$$p(A \cup B) = p(A) - p(A \cap B) + p(B) - p(A \cap B) + p(A \cap B)$$
d'où :
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$
2. Soit $A, B \in P(\Omega)$ tels que $A \subset B$. On a $B = A \cup \complement_{\Omega}^{A} = A \cup (B - A)$ et A et $B - A$ sont disjoints, donc :
$$p(B) = p(A) + p(B - A) \geq p(A) \ \ (car\, p(B - A) \geq 0).$$
3. $\Omega = A \cup \overline{A}$, donc
$$1 = p(\Omega) = p(A) + p(\overline{A}).$$

□

Proposition 3.2 **Soient $(\Omega, \mathscr{F}, p)$ un espace de probabilité et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.**

1. $p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} p(A_n)$. **Il n'y a égalité que si les événements A_n sont deux à deux disjoints.**
2. **Si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, c'est-à-dire si $A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$, alors $p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} p(A_n)$.**

Démonstration :

1. Notons$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \bigcup_{0\leq k\leq n} A_k$ et $C_n = A_n \cap B_n^c$. Notons que les ensembles C_n sont deux à deux disjoints, de plus $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$, par conséquent $p(A) = p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} p(C_n)$. Comme $C_n \subset A_n$ alors $p(A_n) \geq p(C_n)$. De ce fait $p(A) = \sum_{n=0}^{\infty} p(C_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} p(A_n)$.
2. Gardons les notations précédents. On a ici $\bigcup_{0\leq k\leq n} C_k = \bigcup_{0\leq k\leq n} A_k = A_n$ puisque la suite est croissante, donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} p(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} p(C_n) = \sum_{k=0}^{n} p(C_k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} p(C_k) \\ &= p(A_n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} p(C_k) \end{aligned}$$

   On en déduit que

$$|p(A) - p(A_n)| = \sum_{k=0}^{\infty} p(C_k) - \sum_{k=0}^{n} p(C_k)$$

   et l'ensemble de droite converge vers 0 quand n tend vers l'infini par la définition de la convergence d'une série.

□

Remarque : Si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, c'est-à-dire si $A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$, alors on peut montrer aussi que $p\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} p(A_n)$.

Dans la suite de chapitre Ω est un ensemble fini ou dénombrable et $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$.

Définition 3.3 *Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé fini, posons $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. On dit que les événements élémentaires sont équiprobables si tous les $p(\{a_i\})$ sont égaux.*

Proposition 3.3 **Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$ est un espace probabilisé fini tel que les événements élémentaires soient équiprobables. On a alors :**

- $\forall a \in \Omega, p(\{a\}) = \frac{1}{n}$ **où** $n = \operatorname{card}\Omega$.
- **Si** $A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_p}\} \subset \Omega$, $p(A) = \dfrac{p}{n} = \dfrac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card}\Omega} = \dfrac{\textbf{nombre de cas favorables}}{\textbf{nombre de cas possibles}}$

Démonstration : On a $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, donc :

$$1 = p(\{a_1\}) + p(\{a_2\}) + \ldots + p(\{a_n\}), \quad \text{d'où} \quad \forall i, p(\{a_i\}) = \frac{1}{n},$$

et $p(A) = p(\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_p}\}) = \sum_{i=1}^{p} p(\{a_i\}) = p.\dfrac{1}{n} = \dfrac{p}{n}$. □

Exemples :

1. L'exemple déjà étudier d'une partie de pile ou face trois lancers est un cas particulier où les événements élémentaires sont équiprobables.
2. Considérons le jet d'un dé à six faces numérotés de 1 à 6. Si le dé à une forme régulière (cube) et s'il est fait d'une matière homogène, chaque numéro a la même probabilité, c'est $\frac{1}{6}$. Ce pendant on peut fabriquer des dés où le centre de gravité n'est pas à la même distance de chaque face. Dans ce cas il faudra rejeter l'hypothèse d'équiprobabilité.
3. Si on lance un dé truqué comporte les numéros $6, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, dans ce cas $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mais les événements élémentaires ne sont pas équiprobables : la probabilité de ″ sortir 6 ″ est le double de celle ″ sortir 1 ″.

3.3 Exercices résolus

Exercice 1 *p est une probabilité définie sur l'univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Le tableau ci-dessous indique les probabilités des événements élémentaires :*

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
p_i	$\frac{4}{15}$	x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	y

Calculer x et y, pour que :

$$p(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = 2p(\{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}).$$

On a d'une part :

$$\frac{4}{15} + x + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + y = 1 \text{ ou } x + y = \frac{19}{60}$$

d'autre part :

$$\frac{4}{15} + x + \frac{1}{4} = 2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + y\right) \text{ ou } \frac{31}{60} + x = \frac{1}{3} + 2y$$

L'unique solution est $x = \frac{3}{20}$ et $y = \frac{1}{6}$

Exercice 2 *p est une probabilité sur l'univers Ω. A et B sont deux événements tels que :*

$$p(A) = \frac{1}{3}, p(B) = \frac{2}{5} \text{ et } p(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{6}$$

Calculer $p(A \cap B)$, $p(A \cup B)$, $p(B \cap \bar{A})$, $p(\bar{A} \cap \bar{B})$.

• $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est A, donc :

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}),$$

d'où :

$$p(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

• $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, d'où :

$$p(A \cup B) = \frac{17}{30}$$

• $p(B \cap \bar{A}) + p(B \cap A) = p(B)$, donc $p(B \cap \bar{A}) = \frac{7}{30}$.

• $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$, donc $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - p(AB) = \frac{13}{30}$.

Exercice 3 *On lance deux fois de suite une pièce de monnaie. Déterminer l'ensemble Ω pour ce jeu, puis $\mathscr{P}(\Omega)$ et indiquer pour chaque partie de Ω la probabilité associée.*

Il est clair que $\Omega = \{P, F\} \times \{P, F\} = \{(P,P), (P,F), (F,P), (F,F)\}$ et $\mathscr{P}(\Omega) = A \cup B \cup C \cup D$, avec

$$A = \{\varnothing, \Omega\}$$

$$B = \{\{(P,P)\}, \{(P,F)\}, \{(F,P)\}, \{(F,F)\}\}$$
$$C = \{\{(P,P),(P,F)\}, \{(P,P),(F,P)\}, \{(P,P),(F,F)\}, \{(P,F),(F,P)\}, \{(P,F),(F,F)\}, \{(F,P),(F,F)\}\}$$
$$D = \{\{(P,P),(P,F),(F,P)\}, \{(P,F),(F,P),(F,F)\}, \{(F,F),(P,P),(P,F)\}, \{(F,F),(P,P),(F,P)\}\}$$

On suppose que les deux dés ne sont pas truqués, donc, par équiprobabilité, on a :

$$\forall E \in \mathscr{P}(\Omega), \quad p(E) = \frac{\operatorname{card} E}{2^4},$$

d'où :

$$p(\varnothing) = 0 \text{ et } p(\Omega) = 1$$

$$\forall E \in B, \quad p(E) = \frac{1}{16}$$

$$\forall E \in C, \quad p(E) = \frac{2}{16}$$

$$\forall E \in D, \quad p(E) = \frac{3}{16}$$

Exercice 4 *Une urne contient 1 boule noire, 2 boules rouges, 3 boules vertes.*

1. *On prélève successivement et sans remise deux boules de l'urne et on note leur couleur. On suppose que tous les tirages sont équiprobables. Quelle est la probabilité des événements suivants :* A *: " obtenir deux boules vertes "* B *: " obtenir au moins une boule rouge "* C *: " obtenir deux boules de couleurs différentes ".*
2. *Mêmes questions qu'au 1) On prélève successivement deux boules avec remise (la première est remise dans l'urne avant le tirage de la deuxième).*
3. *Mêmes questions, en supposant que l'on prélève deux boules simultanément.*

Pour distinguer les boules de même couleur, on suppose que les boules sont numérotées

$$N_1, R_2, R_3, V_4, V_5, V_6.$$

1. Soit Ω l'univers associé à ce premier type de tirage, donc $\operatorname{card}\Omega$ est le nombre d'arrangements de deux éléments (les deux boules tirées) d'un ensemble à six éléments (six boules dans l'urne) donc

$$\operatorname{card}\Omega = A_6^2 = 6\times 5 = 30.$$

• Pour que A soit réalisable il faut tirer deux boules vertes successivement et sans remise, l'urne contient trois boules vertes, donc $\operatorname{card}A$=$3\times 2 = 6$.
D'où :

$$p(A) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

• De même $p(B) = 1 - p(\bar{B})$, $\bar{B}$: " aucune boule rouge ". Pour que $\bar{B}$ soit réalisable il faut tirer les deux boules, successivement et sans remise, parmi les 4 boules N_1, V_4, V_5, V_6. donc $\operatorname{card}\bar{B} = 4\times 3 = 12$
D'où

$$p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - \frac{12}{30} = \frac{3}{5}.$$

• $p(C) = 1 - p(\bar{C})$ avec $\bar{C}$: " deux boules de mêmes couleurs "
$\bar{C} = C_1 \cup C_2$ (réunion disjointe)
avec : C_1 : " obtenir deux boules vertes " C_2 : " obtenir deux boules rouge " donc $\operatorname{card}\bar{C}$=$2\times 1 + 3\times 2 = 8$ et

$$p(C) = 1 - \frac{8}{30} = \frac{11}{15}$$

2. Ici $\operatorname{card}\Omega$ est le nombre d'application d'un ensemble de six éléments dans un ensemble à 2 éléments, donc $\operatorname{card}\Omega$ =$6^2 = 36$.
De façon similaire, on trouve $\operatorname{card}A$=$3\times 3 = 9$ et $\operatorname{card}\bar{B}$=$4\times 4$
Pour $\bar{C}$, on a $\bar{C} = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ (réunion disjointe) avec :
C_1 : " obtenir deux boules vertes "
C_2 : " obtenir deux boules rouge "
C_3 "obtenir deux boules noires "
D'où

$$\operatorname{card}\bar{C} = \operatorname{card}C_1 + \operatorname{card}C_2 + \operatorname{card}C_3 = 3\times 3 + 2\times 2 + 1\times 1 = 14$$

Ainsi

$$p(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}, p(B) = 1 - \frac{16}{36} = \frac{5}{9}, \text{ et } p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - \frac{14}{36} = \frac{11}{18}.$$

3. On obtient exactement les mêmes résultats qu'à la question 1) ; l'ordre des boules tirées n'intervient pas ; $\operatorname{card}\Omega = \complement_6^2 = 15$, donc il y a 15 issues possibles dont 3 réalisent A, 6 réalisant $\bar{B}$ et 4 réalisant$\bar{C}$.

Exercice 5 *Est-il probable d'amener au moins une fois un six avec un dé en quatre coups que d'amener un double six au moins une fois avec deux dés en 24 coups ? (On suppose que les dés ne sont pas truqués)*

Avec un dé :
L'expérience consiste à lancer quatre fois un dé et à noter les numéros obtenus ; Ω est l'ensemble

$$\{1,2,3,4,5,6\}^4,$$

donc $\operatorname{card}\Omega = 6^4$.
Soit A l'événement : " obtenir au moins une fois 6 " ; alors $\bar{A} = \{1,2,3,4,5\}^4$
donc $\operatorname{card}\bar{A} = 5^4$ et $p(A) = 1 - \frac{5^4}{6^4} = 0.5177$

Avec deux dés (un bleu et un noir) **:**
L'expérience consiste à lancer 24 fois les deux dés et à noter les couples (b,n) obtenus ; b désigne le numéro obtenu avec le dé bleu et n avec le dé noir. Il y a $6^2 = 36$ couples possibles et $\text{card}\Omega = 36^{24}$. Soit B l'événement : " obtenir au moins une fois un double 6"; $\text{card}\bar{B} = 35^{24}$ donc $p(B) = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} = 0.4914$
Conclusion :
Il est plus probable d'amener au moins une fois un six avec un dé en quatre coups que d'amener un double six au moins une fois avec deux dés en 24 coups.

4 Probabilité conditionnelle

4.1 Définitions et propriétés

Proposition 4.1 **Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé et B un événement de probabilité non nulle. la probabilité de A sachant que B est réalisé est le nombre noté $p(A/B)$ ou $p_B(A)$, donné par $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$. L'application : $p_B : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ est une probabilité sur Ω : C'est la probabilité conditionnelle sachant B.**

Démonstration : • Il est clair que $p_B(\Omega) = \dfrac{p(\Omega \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(B)}{p(B)} = 1$.
• $\forall A,\ A' \subset \Omega$, tels que $A \cap A' = \emptyset$ on a :
$$p_B(A \cap A') = \frac{p[(A \cap A') \cap B]}{p(B)} = \frac{p[(A \cap B) \cap (A' \cap B)]}{p(B)} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} + \frac{p(A' \cap B)}{p(B)} = p_B(A) + p_B(A').$$
□

Exemple : On tire une carte d'un jeu de 32 cartes :

♠	1	R	D	V	10	9	8	7
♡	1	R	D	V	10	9	8	7
♢	1	R	D	V	10	9	8	7
♣	1	R	D	V	10	9	8	7

On considére les trois événements :
• R : " *tirer un roi* "
• T : " *tirer un trèfle* "
• $R \cap T$: "*tirer un roi de trèfle* "
Ici $\text{card}\,\Omega = 32$ et
$$p(T) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4},\ \ p(R \cap T) = \frac{1}{32} \ \text{ et } \ \frac{p(R \cap T)}{p(T)} = \frac{1}{8}$$
On arrive maintenant à savoir, avant de découvrir la carte, qu'il s'agit d'un trèfle. Dans ce cas l'espace des événements est $\Omega' = \{1, R, D, V, 10, 9, 8, 7\}$ (les huit cartes de trèfle)
Donc tirer un roi dans ces conditions-là est un événement de Ω'. C'est tirer un roi sachant que l'on tiré un trèfle. Cet événement est noté R/T et $p(R/T) = \frac{1}{8}$
On a bien $p(R/T) = \frac{p(R \cap T)}{p(T)}$.

Remarques : • Il est parfois aisé de déterminer $p(A/B)$. On peut alors déduire $P(A \cap B)$ en écrivant $P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B)$.
• De même, si $P(A) \neq 0, P(A \cap B) = P(B/A) \times P(A)$.

Proposition 4.2 **Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$ tels $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$, il y a équivalence entre les propriétés suivantes :**

1. $P(A/B) = P(A)$
2. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
3. $P(B/A) = P(B)$.

4.2 Formule des probabilités totales

Définition 4.1 *Soit $A_1, A_2, ..., A_n$ des événements d'un espace Ω. On dit que $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une partition de Ω si :*

1. $\forall i \in \{1, 2, ..., n\},\ A_i \neq \emptyset$.
2. $\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, *si* $i \neq j$ *alors* $A_i \cap A_j = \emptyset$.
3. $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$.

Exemple : Dans une urne on dépose 7 boules rouges, 4 boules noires et 2 boules vertes. On tire successivement deux boules sans les remettre dans l'urne. Pour $i = 1$ ou 2, on note : R_i l'événement " tirer une boule rouge au $i^{ème}$ tirage " N_i l'événement " tirer une boule noire au $i^{ème}$ tirage " V_i l'événement " tirer une boule verte au $i^{ème}$ tirage " On a :

- $R_1 \neq \emptyset,\ N_1 \neq \emptyset,\ V_1 \neq \emptyset$
- $R_1 \cap N_1 = \emptyset,\ V_1 \cap R_1 = \emptyset,\ N_1 \cap V_1 = \emptyset$.
- $R_1 \cup N_1 \cup V_1 = \Omega$
- N_1, V_1, R_1 forment une partition de Ω.

De même N_2, V_2, R_2 forment une partition de Ω.

Proposition 4.3 *(Formule des probabilités totales)* **Soit A un événement d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$ et $A_1, A_2, ..., A_n$ des événements formant une partition de Ω. Alors :**

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A/A_i) \times p(A_i).$$

Démonstration : On a :

$$\begin{aligned} p(A) &= p(A \cap \Omega) \text{ car } A \subset \Omega \\ &= p(A \cap (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)) \\ &= p((A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) \cup ... \cup (A \cap A_n)) \\ &= p(A \cap A_1) + p(A \cap A_2) + ... + p(A \cap A_n)) \text{ car } A_1, A_2, ..., A_n \text{ sont deux à deux disjoints} \\ &= p(A/A_1) \times p(A_1) + ... + p(A/A_n) \times p(A_n) \text{ car } p(A \cap B) = p(A) \times p(B). \end{aligned}$$

□

Exemple : Un individu est choisi au hasard dans une population possédant la proportion $p \in]0,1[$ de tricheurs. On fait tirer une carte d'un jeu de 52 cartes cet individu et on admet que si cet individu est un tricheur il est sur de retourner un as. Quelle est la probabilité que cet individu retourne un as ?
Soit T l'événement " l'individu choisi est un tricheur ", et A l'événement " l'individu retourne un as ".
On a :

$$\Omega = T \cup \bar{T},$$

ainsi :

$$\begin{aligned} p(A) &= p(T)p(A/T) + p(\bar{T})p(A/\bar{T}) \\ &= p.1 + (1-p).\frac{1}{13} \\ &= \frac{1+12p}{13} \end{aligned}$$

$(p(A/\bar{T}) = \frac{1}{13}$, si l'individu ne triche, il 4 chances sur 52 de retourner un as)

Proposition 4.4 *(Formule de Bayes)* **Sous les mêmes conditions de la proposition précédente, si de plus $p(B) > 0$, on a, pour tout entier $k \in \{0, 1, ..., n\}$, l'identité :**

$$p(A_k/B) = \frac{p(B/A_k) \times p(A_k)}{\sum_{i=1}^{i=n} p(B/A_i) \times p(A_i)}.$$

Démonstration : $\forall k \in \{0, 1, ..., n\}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} p(A_k/B) &= \frac{p(B \cap A_k)}{p(B)} \\ &= \frac{p(B/A_k)p(A_k)}{\sum_{i=1}^{i=n} p(B/A_i) \times p(A_i)} \end{aligned}$$

□

Exemple : Un maître et son élève tirent à l'arc sur une cible. La probabilité pour que l'arc aille à l'élève est 0.8 ; dans ce cas, la probabilité que la flèche aille au but est 0.5. Par contre, si la flèche est tirée par le maître, la probabilité de succès est 0.7. Une flèche part au but ; quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée par le maître ?
Notons :
A" l'arc va au maître "
B " la flèche va au but "
Donc la probabilité demandée est la propbabilité conditionnelle $p(A/B)$.

$$p(A_{/B}) = \frac{p(B_{/A})p(A)}{p(B_{/A})p(A) + p(B_{/\bar{A}})p(\bar{A})},$$

d'où

$$p(A_{/B}) = \frac{0.7 \times 0.2}{0.7 \times 0.2 + 0.5 \times 0.8} = 0.2592.$$

5 Indépendance

Soit A et B deux événements de probabilités non nulles. Remarquons que si la réalisation de l'événement B ($p(B) \neq 0$) n'agit pas sur la probabilité de la réalisation de l'événement A ($p(A) \neq 0$), c'est à dire $p(A/B) = p(A)$, alors la formule des probabilités composées devient :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Définition 5.1 *Deux événements A et B d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$ sont dits* ***indépendants*** *si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.*

Remarques :

1. L'indépendance est une relation symétrique entre les événements.
2. Si $p(A) = 0$ ou $p(B) = 0$, les deux événements sont indépendants ($p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0$).

Exemples :

1. On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. On considère les trois événements :
   R : " tirer un roi "
   T : " tirer un trèfle "
   $R \cap T$: "tirer un roi de trèfle "
   Les événements R : " tirer un roi " et T : " tirer un trèfle" sont indépendants, en effet :
   $$p(R) = \frac{1}{8}, \;\; p(T) = \frac{1}{4} \;\text{ et }\; p(R \cap T) = \frac{1}{32},$$
   donc
   $$p(R \cap T) = p(R) \times p(T).$$
   Autrement dit, savoir ou non que T est réalisé n'intervient pas dans la probabilité de R.
2. Considérons les différentes répartitions possibles des sexes des enfants d'une famille ayant n enfants.
   Considérons l'événement M :" la famille a des enfants de deux sexes " et l'événement F : " la famille a au plus une fille ".
   Notons $\mathcal{F}_n$ l'ensemble de ces répartitions. card$\mathcal{F}_n = 2^n$.
   Cas : $n = 2$
   $$\mathcal{F}_2 = \{(G,G),(G,F),(F,G),(F,F)\}$$
   Alors
   $$M = \{(G,F),(F,G)\}, F = \{(G,G),(G,F),(F,G)\} \;\text{ et }\; M \cap F = M$$
   d'où
   $$p(M) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \;\; p(F) = \frac{3}{4}, \;\; p(M \cap F) = \frac{1}{2}.$$
   Ainsi $p(M \cap F) \neq p(M).p(F)$, donc M et F ne sont pas indépendants dans ce cas.
   Cas : $n = 3$
   On a dans ce cas :
   $$\mathcal{F}_3 = \{(G,G,G),(G,G,F),(G,F,F),(F,G,F),(F,G,G),(F,F,G),(G,F,G),(F,F,F)\}$$

$$M = \{(G,G,F),(G,F,F),(F,G,F),(F,G,G),(F,F,G),(G,F,G)\}$$
$$F = \{(G,G,G),(G,G,F),(F,G,G),(G,F,G)\}$$

et

$$M \cap F = \{(G,G,F),(F,G,G),(G,F,G)\}$$

d'où

$$p(M) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4},\ \ p(F) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},\ \ p(M \cap F) = \frac{3}{8}$$

Dans ce cas $p(M \cap F) = p(M).p(F)$. M et F sont indépendants.

Exercice 6 *Montrer que , pour $n > 3$, M et F ne sont pas indépendants.*

Proposition 5.1 **Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$. Si A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$ sont indépendants. De même pour les événements $\bar{A}$ et B et pour les événements $\bar{A}$ et $\bar{B}$.**

Démonstration : On a $A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$ et cette réunion est disjointe, d'où

$$\begin{array}{rcl} p((A \cap \bar{B}) & = & p(A) - p(A \cap B) \\ & = & p(A) - p(A).p(B) \\ & = & p(A)(1 - p(B)) \\ & = & p(A).p(\bar{B}) \end{array}$$

donc les événements A et $\bar{B}$ sont indépendants, et par symétrie $\bar{A}$ et B sont aussi indépendants. Comme $\bar{B}$ et A sont indépendants. alors $\bar{B}$ et $\bar{A}$ sont indépendants. □

Définition 5.2 *Soit $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite finie d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$. On dit que les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ sont mutuellement indépendants si pour toute suite finie $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k}$ d'événements distincts, on a :*

$$p(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = p(A_{i_1}).p(A_{i_2}).....p(A)_{i_k}$$

Remarque : Si les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ sont mutuellement indépendants, alors ils sont indépendants deux à deux, mais la réciproque est est fausse en général. Voici un contre exemple.

Exemple : On lance deux dés non truqués dont les résultats sont notés a et b. Considérons les événements suivants $A = \{a$ pair $\}$, $B = \{b$ impair $\}$ et $C = \{a$ et b de même parité$\}$. On a : $p(A) = p(B) = p(C) = \frac{1}{2}$ et $p(A \cap B) = p(A \cap C) = p(B \cap C) = \dfrac{1}{4}$ donc A, B et C sont deux à deux indépendants, mais $p(A \cap B \cap C) = 0 \neq \dfrac{1}{8}$: A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

•••••••••