Chapitre 25
VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES

Mohamed TARQI

Table des matières

1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

1.1 Variables aléatoires

Définition 1.1 *On appelle variable aléatoire réelle (en abrégé v.a.r) toute application de Ω dans $\mathbb{R}$.*

Notations :
Soit X une variable aléatoire réelle de Ω dans $\mathbb{R}$:

1. $X^{-1}(x) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\}$ se note $(X = x)$.
2. $X^{-1}(]a,+\infty[) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) > a\}$ se note $(X > a)$.
3. $X^{-1}([a,b[) = \{\omega \in \Omega / a \leq X(\omega) < b\}$ se note $(a \leq X \leq b)$.
4. $X^{-1}(]-\infty,a]) \cap X^{-1}(]-\infty,b])$ se note $(X \leq a, X \leq b)$.

Exemples :

1. On lance une pièce de monnaie, l'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{P,F\}$, soit X la variable définie par $X(\{P\}) = 1$ et $X(\{F\}) = 0$, alors
$$p(X=0) = p(X=1) = \frac{1}{2}$$
2. Soit une urne à deux catégories contenant des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $1-p$. On tire de cette urne n boules avec remise, à chaque tirage ω de n boules on peut faire correspondre le nombre $X(\omega)$ des boules blanches obtenues. Dans ce cas on a $X(\Omega) = [0,n]$.

3. Un tournoi de football se joue entre quatre équipes. Chaque équipe doit rencontrer une fois et une fois seulement les trois autres. À chaque match, on attribue 2 points à l'équipe gagnante, 0 point à l'équipe perdante et 1 point à chaque équipe s'il y a match nul.
Soit X le nombre de points marqués par une équipe donnée à la fin du tournoi. Ici
$$X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5,6\}.$$

1.2 Loi d'une variable aléatoire

Proposition 1.1 *(et définition)* **Soit X une v.a.r définie sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$, alors l'application :**
$$p_X : \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ a & \longmapsto & p(X=a) \end{array}$$
est une probabilité sur $X(\Omega)$, s'appelle la loi de probabilité de X. On dit aussi que la v.a.r X suit la loi de probabilité p_X.

Démonstration : • On a :
$$X(\Omega) = \bigcup_{a\in\Omega} (X=a)$$
donc
$$p_X(X(\Omega)) = \sum_{a\in\Omega} p(X=a) = 1$$
• Soient B et B' deux parties disjointes de $X(\Omega)$, donc ils existent deux parties disjointes A et A' de Ω tels que : $X(A) = B$ et $X(A') = B'$, donc :
$$\begin{aligned} p_X(B\cup B') &= p\left(\bigcup_{a\in B\cup B'} X=a\right) \\ &= p(A\cup A') \\ &= p(A)+p(A') \\ &= p(X^{-1}(A))+p(X^{-1}(A')) \\ &= p_X(B)+p_X(B') \end{aligned}$$
□

Exemple : Un sac contient six jetons : deux jetons portent le numéro 1 ; trois portent le numéro 2 ; un jeton porte le numéro 3.
On suppose que les jetons ont même probabilité d'apparition.
On tire simultanément trois jetons du sac. Soit X la v.a.r associée à la somme des nombres portés par les jetons tirés.
Déterminer la loi de X.
L'univers Ω associé à cette épreuve est l'ensemble des parties à trois éléments (jetons) parmi les six que contient le sac.
D'où :
$$\operatorname{card}\Omega = C_6^3 = 20$$
On peut avoir des types d'éventualités suivants :
$$\{1,1,1\},\{1,2,2\},\{1,1,3\},\{1,2,3\},\{2,2,2\},\{2,2,3\}$$
Donc X prend les valeurs : 4,5,6,7, c'est-à-dire $X(\Omega) = \{4,5,6,7\}$.
$$\begin{aligned} p(X=4) &= \frac{C_2^2C_3^1}{20} = \frac{3}{20} \\ p(X=5) &= \frac{C_2^1C_3^2 + C_2^2C_1^1}{20} = \frac{7}{20} \\ p(X=6) &= \frac{C_2^1C_3^1C_1^1 + C_3^3}{20} = \frac{7}{20} \\ p(X=7) &= \frac{C_3^2C_1^1}{20} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$
La loi de probabilté de X se résume dans le tableau suivant :

$x_i \in X(\Omega)$	4	5	6	7
$p(X=x_i)$	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{20}$

2 Caractéristiques d'une variable aléatoire

2.1 Fonction de répartition

Définition 2.1 *Soit X une v.a.r définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$, on appelle fonction de répartition de de X la fonction numérique F_X définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = p(X \leq x)$$

Exercice 1 *Un sac contient 3 boules rouges et 3 boules vertes. On tire une à une les 6 boules du sac (sans remise)*
Soit X la v.a.r qui à chaque tirage des six boules associe le nombre de boules vertes tirées avant l'apparition, pour la première fois, d'une boule rouge.

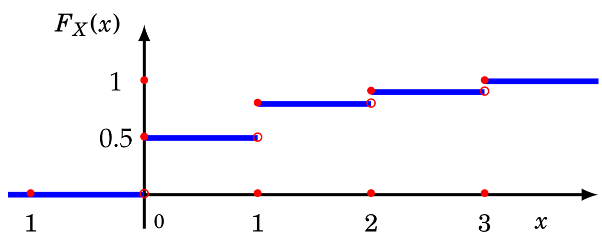
1. *Quelles sont les valeurs prises par X ?*
2. *Quelle est la loi de X ?*
3. *Définir la fonction de répartition de X.*

---

1. Le résultat de cette épreuve est une permutation des 6 boules et, si on désigne par Ω l'univers des éventualités, alors :
$$\operatorname{card}\Omega = 6!$$
Il est évident que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ (car la première boule rouge peut apparaître au 1^{er} tirage (alors $X = 0$), ou au $2^{\text{ème}}$ tirage (alors $X = 1$), ou au $3^{\text{ème}}$ tirage (alors $X = 2$) ou au $4^{\text{ème}}$ tirage (alors $X = 3$))
2. $p(X = 0) = p(E_0)$
E_0 étant l'événement constitué des permutations des 6 boules du sac où une rouge figure en première position, donc
$$\operatorname{card}E_0 = \complement_3^1 5!$$
($\complement_3^1$ est le nombre de choix de la boule rouge tiré la 1° fois, 5! est le nombre de permutations des 5 autres boules), alors :
$$p(X = 0) = \frac{\complement_3^1 5!}{6!} = \frac{1}{2}$$
$p(X = 1) = p(E_1)$
E_1 étant l'événement constitué des permutations des 6 boules du sac où figure une verte en 1^{er} position, et une rouge en deuxième position, donc
$$\operatorname{card}E_1 = \complement_3^1 \complement_3^1 4!$$
($\complement_3^1$ pour la verte tiré la 1° fois, $\complement_3^1$ pour la rouge tirée la 2° fois, 4! est le nombre de permutations des quatre autres boules), donc :
$$p(X = 1) = \frac{\complement_3^1 \complement_3^1 4!}{6!} = \frac{3}{10}$$
$p(X = 2) = p(E_2)$
E_2 étant l'événement constitué des permutations des 6 boules du sac où figurant une verte en 1^{er} position, une verte en 2° position et une rouge en 3° position, donc
$$\operatorname{card}E_2 = A_3^2 \complement_3^1 3!$$
(A_3^2 correspondant aux arrangements des deux boules vertes figurant en 1 et 2 positions, $\complement_3^1$ correspond à la rouge tirée la 3° fois, 3! est le nombre de permutations des trois autres boules), donc :
$$p(X = 2) = \frac{A_3^2 \complement_3^1 3!}{6!} = \frac{3}{20}$$
$p(X = 3) = p(E_3)$
E_3 étant l'événement constitué des permutations des 6 boules du sac où figurant les trois vertes suivies des trois rouges), donc $\operatorname{card}E_3 = 3!3!$
(3! désignant le nombre de permutations des trois boules vertes ou des trois boules rouges), on a :
$$p(X = 2) = \frac{3!3!}{6!} = \frac{1}{20}$$
La loi de probabilité de X est résume dans le tableau suivant :

$k \in X(\Omega)$	0	1	2	3
$p(X = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

3. Fonction de répartition de X. Soit $x \in \mathbb{R}$
   Si $x < 0$, $F_X(x) = 0$
   Si $x \in [0,1[$, $F_X(x) = p(X = 0) = \frac{1}{2}$
   Si $x \in [1,2[$, $(X \leq x) = (X = 0) \cup (X = 1)$ (réunion disjointe) donc :
   $$F_X(x) = p(X \leq x) = p(X = 0) + p(X = 1) = \frac{8}{10}$$
   Si $x \in [2,3[$ $(X \leq x) = (X = 0) \cup (X = 1) \cup (X = 2)$ (réunion disjointe) donc :
   $$F_X(x) = p(X \leq x) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = \frac{19}{20}$$
   Si $x \in [3,+\infty[$ $(X \leq x) = (X = 0) \cup (X = 1) \cup (X = 2) \cup (X = 3)$ (réunion disjointe)donc :
   $$F_X(x) = p(X \leq x) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) = \frac{20}{20} = 1$$
   D'o'u
   $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \frac{1}{2} & si \quad x \in [0,1[\\ \frac{8}{10} & si \quad x \in [1,2[\\ \frac{19}{20} & si \quad x \in [2,3[\\ 1 & si \quad x \geq 3 \end{cases}$$



La courbe représentative de F_X

Théorème 2.1 **Soit X une $v.a.r.$ et soit F_X sa fonction de répartition. Alors F_X possède les propriétés suivantes :**

1. **F_X est une fonction croissante (au sens large).**
2. **F_X est à valeurs dans $[0,1]$.**
3. **F_X est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.**
4. **F_X a des limites à gauche en tout point, et**
   $$\lim_{x \to a^-} F_X(x) = F_X(a^-) = p(X < a) \leq p(X \leq a) = F_X(a),$$
   où $(F_X(a^-) = \lim_{x \to a^-} F_X(x))$.
5. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ **et** $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
6. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
7. $\forall a \in \mathbb{R}, p(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$.

Démonstration :

1. Si $x \leq y$, $]-\infty,x] \subset]-\infty,y]$ d'où $F_X(x) = P_X(]-\infty,x]) \leq P_X(]-\infty,y]) = F_X(y)$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x)$ est la probabilité d'un ensemble.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On veut montrer que $\lim\limits_{y \to x^+} F_X(y) = F_X(x)$. Comme F_X est croissante, il suffit de montrer que $\lim\limits_{n \to 1} F_X\left(x + \dfrac{1}{n}\right) = F_X(x)$.
   En effet, supposons que $F_X\left(x + \dfrac{1}{n}\right)$ tend vers $F_X(x)$ quand n tend vers $+\infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $F_X(x) \leq F_X\left(x + \dfrac{1}{n}\right) \leq F_X(x^+)$. Comme F_X est croissante, pour tout $x \leq y \leq x + \frac{1}{n}$, $F_X(x) \leq F_X(y) \leq F_X\left(x + \frac{1}{n}\right) \leq F_X(x^+)$. Donc $\lim\limits_{y \to x^+} F_X(y) = F_X(x)$.
   Remarquons que $F_X\left(x + \dfrac{1}{n}\right) = P_X\left(\left]-\infty, x + \dfrac{1}{n}\right]\right)$. La suite d'intervalles $\left]-\infty, x + \dfrac{1}{n}\right]$ est décroissante, la probabilité P_X vérifie donc
   $$\lim_{n \to +\infty} P_X\left(\left]-1, x + \frac{1}{n}\right]\right) = P_X\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-\infty, x + \frac{1}{n}\right]\right) = P_X(]-\infty,x]) = F_X(x).$$
4. Considérons cette fois la suite d'ensembles $\left]-\infty, x - \dfrac{1}{n}\right]$. C'est une suite croissante d'intervalles. On a donc $\lim\limits_{n \to \infty} F_X\left(x - \dfrac{1}{n}\right) = P_X(]-\infty,x[)$. (Alors que $F_X(x) = P_X(]-\infty,x])$.) Comme F_X est croissante, on en déduit que F_X admet $P_X(]-\infty,x[) \leq F_X(x)$ comme limite à gauche en x.
   Remarquons que l'existence de la limite découle immédiatement du fait que si $y < x$ l'application $y \mapsto F_X(y)$ est croissante et majorée par $F_X(x)$.
5. On a $\emptyset = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*}]-\infty,-n]$. Le même raisonnement que ci-dessus donne $\lim\limits_{n \to \infty} F_X(-n) = 0$. Comme F_X est croissante, ceci implique (vérifier !) que $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$. Pour la limite en $+\infty$ considérer les intervalles $]-\infty,n]$.
6. Si $a < b$, on a $]-\infty,b] =]-\infty,a] \cup]a,b]$ (réunion disjointe), donc $F_X(b) = F_X(a) + P(a < X \leq b)$.
7. D'après ce qui précéde, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_X\left(a - \dfrac{1}{n}\right) = F_X(a) + P\left(a - \dfrac{1}{n} < X \leq a\right)$. Or $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \left]a - \dfrac{1}{n}, a\right] = \{a\}$, donc $p(X = a) = \lim\limits_{n \to \infty} P\left(a - \dfrac{1}{n} < X \leq a\right)$, d'où $p(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$.

□

2.2 Espérance mathématiques (la moyenne)

Définition 2.2 *Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$ avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. On appelle espérance mathématique de la v.a.r X le nombre noté $E(X)$, défini par :*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i)$$

Proposition 2.1 **Soit X une v.a.r et U une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur D_X. On a :**

$$E(U(X)) = \sum_{i=1}^{n} U(x_i) p(X = x_i)$$

avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
En particulier si $Y = aX + b$, alors $E(Y) = aE(X) + b$.

Définition 2.3 *Soit X une v.a.r, on pose $Y = X - E(X)$. Y s'appelle la v.a.r centrée associée à X, on a $E(X) = 0$.*
*De manière générale si $E(X) = 0$, X est **dite centrée**.*

2.3 Variance et Écart-type

Définition 2.4 *Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$ avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.*
• *On appelle **variance** de la v.a.r X le réel noté $Var(X)$, défini par :*

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 p(X = x_i)$$

• *On appelle **écart-type** de X le nombre $\sigma(X)$ défini par :*

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Remarques :

1. La variance est un nombre positif car $Var(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 p(X = x_i)$, c'est la somme de produits positifs $[x_i - E(X)]^2$ et $p(X = x_i)$.
2. La variance peut être calculer autrement, en effet :

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 p(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} [x_i^2 - 2x_i E(X) + E^2(X)] p(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(X = x_i) - 2E(X) \sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i) + E^2(X) \sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) \\ &= E(X^2) - 2E^2(X) + E^2(X) \quad \text{car } \left(\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = 1 \right) \\ &= E(X^2) - E^2(X) \end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{Var(X) = E(X^2) - E^2(X)}$$

Proposition 2.2 **Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$ et a, b des réels, alors :**

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X) \quad et \quad \sigma(aX + b) = |a| \sigma(X).$$

Démonstration : On a d'une part :

$$\begin{aligned} Var(aX + b) &= E[(aX + b)^2] - E^2(aX + b) \\ &= a^2 E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - a^2 E^2(X) - 2abE(X) - b^2 \\ &= a^2 [E(X^2) - E^2(X)] \\ &= a^2 Var(X), \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \sigma(aX + b) &= \sqrt{Var(aX + b)} \\ &= \sqrt{a^2 Var(X)} \\ &= |a| \sqrt{Var(X)} \\ &= |a| \sigma(X). \end{aligned}$$

□

Définition 2.5 *La variable aléatoire $Y = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est appelé la variable **centrée-réduite** associée à X.*

Proposition 2.3 **La moyenne d'une v.a.r centrée-réduite Y est nulle et sa variance est égale à un, de même $E(Y^2) = 1$.**

Démonstration : • $E(Y) = E\left(\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}\right) = \dfrac{1}{\sigma(X)}[E(X) - E(E(X))] = \dfrac{1}{\sigma(X)}[E(X) - E(X)] = 0$

• $Var(Y) = \left(\dfrac{1}{\sigma(X)}\right)^2 Var(Y) = 1$ (car $Var(Y) = \sigma^2(Y)$)

• $Var(Y) = 1 \Longrightarrow E(Y^2) - E^2(Y) = 1 \Rightarrow E(Y^2) = 1.$ □

Exemple : Dans l'exemple précédent, exercice 13, on a :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k \in X(\Omega)} k p(X = k) \\ &= 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{3}{20} + 3 \times \frac{1}{20} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k \in X(\Omega)} k^2 p(X = k) \\ &= 0^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{3}{10} + 2^2 \times \frac{3}{20} + 3^2 \times \frac{1}{20} \\ &= \frac{27}{20} \end{aligned}$$

Donc

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{27}{20} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{63}{80}$$

et

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = 0.88741.$$

La variable $Y = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)} = \sqrt{\dfrac{5}{7}} \dfrac{4X - 3}{3}$ est une v.a.r centrée réduite.

2.4 Inégalité de *Bienyamé-Tchebychev*

Proposition 2.4 **Soient X une v.a.r sur un univers Ω fini, m sa moyenne et σ son écart-type. Alors, pour tout nombre réel strictement positif ε :**

$$p(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration : Nous savons que :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= Var(X) \\ &= \sum_{x_i \in \Omega} (X(x_i) - m)^2 p(X = x_i) \quad avec \quad \Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \end{aligned}$$

On pose :

$$\Omega' = |X - m| \geq \varepsilon = \{x_i \in \Omega \ / \ |X(x_i) - m| \geq \varepsilon\}$$

alors

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{x_i \in \Omega} (X(x_i) - m)^2 p(X = x_i) \\ &\geq \varepsilon^2 p(\Omega') p(X = x_i) \\ &\geq \varepsilon^2 p(\Omega') = \varepsilon^2 p(|X - m| \geq \varepsilon) \end{aligned}$$

d'où

$$p(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

□

Remarque : En considérant l'événement contraire Ω'^C, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$p(|X-m|<\varepsilon)\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

En effet, $1-p(\Omega')\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$, c'est-à-dire $p(|X-m|<\varepsilon)\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ $(\Omega'^C=|X-m|<\varepsilon)$.

3 Lois usuelles

3.1 Loi uniforme

Soit X une variable aléatoire sur un univers Ω avec $X(\Omega)=\{x_1,x_2,...,x_n\}$

Définition 3.1 *On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi **uniforme** sur $X(\Omega)$ et on écrit $X\hookrightarrow U_n$ si $p(X=x_i)=\frac{1}{n}$.*

On a :

$$E(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \quad et \quad Var(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-E^2(X)$$

Cas particulier :
Si $X(\Omega)=\{1,2,...,n\}$, alors la loi de X peut être facilement résumée par :
- $P(X=x_i)=\frac{1}{n}$, $i=1,2,...,n$
- $E(X)=\frac{n+1}{2}$
- $Var(X)=\frac{n^2-1}{12}$

3.2 Lois de tirage avec remise

3.2.1 Loi de Bernoulli

Définition 3.2 *On dit qu'une variable aléatoire X est une $v.a.r$ de **Bernoulli** si elle ne prend que deux valeurs 0 et 1 avec des probabilités non nulles. On dit X suit la loi de Bernoulli de paramètre p et on écrit $X\hookrightarrow\beta(1,p)$*

Exemple : On lance une pièce de monnaie où la probabilité d'amener pile est notée $p\in]0,1[$. La v.a.r X définie par $X=1$ si le résultat est pile et $X=0$ sinon. X est une $v.a.r$ de Bernoulli.

Proposition 3.1 **Soit $X\hookrightarrow\beta(1,p)$, alors**

$$E(X)=0(1-p)+1.p=p \quad et \quad V(X)=(0-p)^2(1-p)+(1-p)^2p=p(1-p)=pq.$$

3.2.2 Loi binomiale (Schéma de Bernoulli)

On dispose d'une urne qui contient deux types de boules, des noires et des blanches par exemple.
Dans cette urne, la proportion des boules blanches est p, celle des noires est $q=1-p$.
Chaque fois que l'on tire une boule, on la remet dans l'urne. On a, à chaque tirage, la probabilité $p(B)$ de tirer une boule blanche est $p(B)=p$ et celle de tirer une boule noire est $p(N)=q=1-p$.
Cette situation illustre ce qui porte le nom de **schéma de Bernoulli** :

Définition 3.3 *Une épreuve donne lieu à deux issues possibles B (succès) et N (échec). La probabilité du succès est p et celle d'échec est $q=1-p$ cette épreuve est exécuté n fois.*
On dit qu'on a confronté à un schéma de Bernoulli caractérisé par les nombres n (nombre d'épreuves) et p (probabilité de succès à chaque épreuve)

3.2.3 Univers associé à un schéma de Bernoulli

Soit un schéma de Bernoulli de paramètres n et p. Chaque série de n tirages peut être résumée par une liste de n lettres, chacune étant B ou N.
Il y a donc 2^n listes possibles qui sont les événements élémentaires.

Proposition 3.2 **Un schéma de Bernoulli de paramètres n et p donne lieu à un univers Ω_n ayant 2^n éléments.**

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de boules blanches obtenues à la fin de ces n tirages. Nous avons :

$$X(\Omega_n) = \{0, 1, \dots, n\}$$

Théorème 3.1 **Dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p , étant donné k entier compris entre 0 et n, la probabilité de l'événement $(X = k)$ est $\complement_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.**

Démonstration : En effet : L'événement $(X = k)$ est formé de $\complement_n^k$ événements élémentaires. Étudions, par exemple, l'événement élémentaire $\underbrace{B\dots B}_{k \text{ fois}}\ \underbrace{N\dots N}_{n-k \text{ fois}}$ Chaque tirage d'une boule est indépendant des autres, il vient alors $p(B\dots BN\dots N) = \underbrace{p\dots p}_{k \text{ fois}}\ \underbrace{q\dots q}_{n-k \text{ fois}} = p^k(1-p)^{n-k}$
D'autres part les $\complement_n^k$ événements élémentaires qui constituent $(X = k)$ ont la même probabilité, car le nombre de lettres B est le même dans tous les cas. Seul l'ordre qui change, c'est-à-dire

$$P(X = k) = \complement_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

□

Définition 3.4 *étant donné un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, la probabilité, sur l'univers Ω_n qui lui est associé, définie par $p(X = k) = \complement_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ porte le nom de la **loi binomiale**. On la note $\mathscr{B}(n, p)$ et on dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p . On écrit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$*

Exemple : Supposons que dans des conditions normales de fonctionnement, la quantité de pièces défectueuses usinées par une machine est 1%.
En considérant que la machine est bien réglée, le nombre X de pièces défectueuses dans une caisse de 100 pièces, suit la loi ß$(100, 10^{-2})$.
La probabilité pour qu'il y ait moins de 2 pièces défectueuses dans la caisse est donc :

$$\begin{aligned}
1 - p(X < 2) &= 1 - p(X = 0) - p(X = 1) \\
&= 1 - \complement_{100}^0 0.01^0 (1 - 0.01)^{100} - \complement_{100}^1 0.01^1 (1 - 0.01)^{99} \\
&= 1 - 0.99^{100} - 0.99^{99} \\
&= 0.26424
\end{aligned}$$

Exercice 2 *Dans un groupe de 100 personnes, quelle est la probabilité pour que 2 personnes exactement soient nées le même jour ?*

On suppose que :
- La probabilité de naissance est le même toute l'année
- Il y a indépendance entre les naissances.
- Il n'y a pas d'anniversaire le 29 février (On ne tient pas compte des années bissextiles)

Pour un jour donné, à chaque individu, on associé une v.a.r de Bernoulli égale à 1 si son anniversaire, 0 sinon.
Le nombre de personnes nées ce jour là est donc une variable binomiale $X \hookrightarrow$ß$(100, p)$ avec $p = \dfrac{1}{365}$.
La probabilité cherchée est donc :

$$\begin{aligned}
p(X = 2) &= \complement_{100}^2 p^2 (1-p)^{98} \\
&= \frac{100 \times 99}{2} \left(\frac{1}{365}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{365}\right)^{98} \\
&= 0.0284
\end{aligned}$$

Proposition 3.3 **Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$ et $V(X) = npq$.**

Démonstration : • Par définition, on a :

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} kp(X=k)=\sum_{k=0}^{n} k\complement_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n} k\complement_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

(le 1$^{\text{er}}$ terme est nul) et

$$k\complement_n^k=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

donc

$$\begin{aligned}
E(X) &= n\quad p\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k}\\
&= np\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!}p^{i}(1-p)^{n-1-i}\\
&= np(p+1-p)^{n-1}\\
&= np
\end{aligned}$$

• On peut écrire :

$$\begin{aligned}
Var(X) &= E(X(X-1))+E(X)-E^2(X)\\
&= E(X(X-1))+np-n^2p^2
\end{aligned}$$

Calculons $E(X(X-1))$.

$$\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\complement_n^k p^k(1-p)^{n-k}\\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\complement_n^k p^k(1-p)^{n-k}\text{(les deux premiers termes sont nuls)}
\end{aligned}$$

mais

$$k(k-1)\complement_n^k=n(n-1)\complement_{n-2}^{k-2}$$

donc

$$\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\complement_{n-2}^{k-2}p^k(1-p)^{n-k}\\
&= n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\complement_{n-2}^{k-2}p^{k-2}(1-p)^{n-k}\\
&= n(n-1)p^2\sum_{i=0}^{n-2}\complement_{n-2}^{i}p^{i}(1-p)^{(n--2)-i}\quad (avec\quad i=k-2)\\
&= n(n-1)p^2(p+1-p)^{n-2}\\
&= n(n-1)p^2
\end{aligned}$$

D'où :

$$Var(X)=E(X(X-1))+np-n^2p^2=n(n-1)p^2+np-n^2p^2=npq$$

□

Exercice 3 *Un dé tétraédique a ses quatre faces numérotées $1,2,3,4$. Soit p_i la probabilité pour que le dé repose sur la face numérotée i après un lancer $(i=1,2,3,4)$. On donne :*

$$p_1=\frac{1}{12},p_2=\frac{7}{36},p_3=\frac{11}{36},4=\frac{5}{12}$$

Soit X la v.a.r qui associe à un jet de ce dé la somme des nombres portés sur les faces visibles. On lance le dé 5 fois de suite. Quelle est la probabilité pour que l'événement A " X est pair " se réalise
a) deux fois exactement ?
b) au moins une fois ?
c) au plus une fois ?

3.3 Loi hypergéomètrique

On considère une urne qui contient N boules, N_p boules blanches et N_q boules noires, avec p la proportion des boules blanches et $1-p$ celle des boules noires.

Définition 3.5 *On considère l'urne précédente, on tire n boules de cette urne, sans remise, et on appelle X la v.a.r égale au nombre de boules blanches obtenues et on dit que X suit une loi hypergéomètrique de paramètres N,n et p. Nous écrivons $X \hookrightarrow \Im(N,n,p)$*

Proposition 3.4 **Si $X \hookrightarrow \Im(N,n,p)$, alors $X(\Omega) \subset [0,n]$ et $\forall k \in [0,n]$ $p(X=k) = \dfrac{C_{N_p}^k \times C_{N_q}^{n-k}}{C_N^n}$.**

Proposition 3.5 **Soit $X \hookrightarrow \Im(N,n,p)$, on a $E(X) = np$ et $V(X) = npq\dfrac{N-n}{N-1}$.**

Remarque : On montre que $\dfrac{C_{N_p}^k \times C_{N_q}^{n-k}}{C_N^n}$ tend vers $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ quand N tend vers $+\infty$. On dit que X converge en loi vers une variable binomiale de paramètres n et p.
Si N est assez grand, on peut, dans un calcul de probabilité, remplacer la loi hypergéomètrique $\Im(N,n,p)$ dépendant de trois paramètres par la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ qui ne dépend que de deux paramètres n et p. Dans la pratique, on admet que cette approximation est satisfaisante lorsque $N > 10n$.

4 Couple de variables aléatoires

4.1 Lois marginales

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé fini et $\vec{C} = (X,Y)$ un couple de variables aléatoires, nous noterons :
- $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$.
- $p_{ij} = p((X = x_i) \cap (Y = y_j))$, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$.
- $p_{i.} = p((X = x_i)$, pour $i \in [\![1,n]\!]$.
- $p_{.j} = p(Y = y_j))$, pour $j \in [\![1,m]\!]$.

Définition 4.1 *Soit $\vec{C} = (X,Y)$ un couple de variables aléatoires.*
1) L'application

$$p: \begin{array}{ccc} X(\Omega)\times Y(\Omega) & \to & [0,1] \\ (x_i,y_j) & \mapsto & p_{ij} = p((X=x_i)\cap(Y=y_j)) \end{array}$$

*s'appelle la **loi conjointe** du couple $\vec{C} = (X,Y)$*
2) L'application

$$p_. : \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \to & [0,1] \\ x_i & \mapsto & p_{i.} = p((X=x_i) \end{array}$$

*s'appelle la **première loi marginale** du couple $\vec{C} = (X,Y)$ (c'est tout simplement la loi de X)*
3) L'application

$$p_. : \begin{array}{ccc} Y(\Omega) & \to & [0,1] \\ y_j & \mapsto & p_{.j} = p(Y=y_j)) \end{array}$$

*s'appelle la **deuxième loi marginale** du couple(c'est la loi de Y)*

Représentation matricielle des lois de $\vec{C} = (X,Y)$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	•	•	•	y_m	Loi de X
x_1	p_{11}	p_{12}				p_{1m}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}				p_{2m}	$p_{2\cdot}$
•							
•							
x_n	p_{n1}	p_{n2}				p_{nm}	$p_{n\cdot}$
Loi de Y	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$				$p_{\cdot m}$	1

Exemple : Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire successivement 2 boules de l'urne. Nous noterons X la v.a.r prenant la valeur 1 si la première boule tirée est blanche et 0 sinon. Nous définissons de même la v.a.r Y concernant le tirage de la deuxième boule. 1^{er} *cas* :Tirage avec remise 2^{e} *cas* : Tirage sans remise

$X\backslash Y$	0	1	Loi de X
0	$\frac{9}{49}$	$\frac{12}{49}$	$\frac{3}{7}$
1	$\frac{12}{49}$	$\frac{16}{49}$	$\frac{4}{7}$
Loi de Y	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	1

$X\backslash Y$	0	1	Loi de X
0	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$
1	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$
Loi de Y	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	1

Théorème 4.1 **Soit $\vec{C}=(X,Y)$ un couple de variables aléatoires. Alors les lois marginales du couple sont données par :**

- $\forall x\in X(\Omega)$, $p(X=x)=\sum\limits_{j=1}^{m} p(X=x,Y=y_j)$.
- $\forall y\in Y(\Omega)$, $p(Y=y)=\sum\limits_{i=1}^{n} p(X=x_i,Y=y)$.
- $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} p(X=x_i,Y=y_j)=1$.

Démonstration : • $\forall x\in X(\Omega)$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}(X=x) &= (X=x)\cap\left(\bigcup_{j=1}^{m} Y=y_j\right)\\ &= \bigcup_{j=1}^{j=m}(X=x_i,Y=y_j)(\text{réunion disjointe})\end{aligned}$$

d'où

$$p(X=x)=p(\bigcup_{j=1}^{m}(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{j=1}^{m} p(X=x,Y=y_j).$$

• De même, on montre que :

$$\forall y\in Y(\Omega), p(Y=y)=\sum_{i=1}^{n} p(X=x_i,Y=y).$$

• On a : $\forall i=1,2,\dots,n$

$$p(X=x_i)=\sum_{j=1}^{m} p(X=x,Y=y_j)\Longrightarrow 1=\sum_{i=1}^{n} p(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(X=x,Y=y_j).$$

□

Remarque : Le théorème peut s'écrire sous la forme :

• $\forall i\in [\![1,n]\!]$, $p_{i\cdot}=\sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij}$.
• $\forall j\in [\![1,m]\!]$, $p_{\cdot j}=\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ij}$
• $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij}=1$.

4.2 Lois conditionnelles

Soit $\vec{C}=(X,Y)$ un couple de variables aléatoires, avec :

$$X(\Omega)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}\, et\, (\Omega)=\{y_1,y_2,\dots,y_m\}$$

$p_{ij}=p((X=x_i)\cap(Y=y_j))$, pour $(i,j)\in [\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]$
$p_{i.}=p(X=x_i)$, pour $i\in[\![1,n]\!]$
$p_{.j}=p(Y=y_j))$, pour $j\in[\![1,m]\!]$

Si $p(Y=y_j)\neq 0$, on peut considérer les nombres

$$p(X=x_i/_{Y=y_j})=\frac{p((X=x_i)\cap(Y=y_j))}{p(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

De même si $p((X=x_i)\neq 0$, on peut considérer les nombres

$$p(Y=y_j/_{X=x_i})=\frac{p((X=x_i)\cap(Y=y_j))}{p(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{j\cdot}}$$

d'où la définition suivante :

Définition 4.2 *Soit $\vec{C}=(X,Y)$ un couple de variables aléatoires. On appelle loi conditionnelle de X sachant $Y=y_j$, l'application définie sur $X(\Omega)$, à valeurs dans $[0,1]$ par la relation :*

$$x_i\rightarrow p(X=x_i/_{Y=y_j})=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

De même on appelle loi conditionnelle de Y sachant $X=x_i$, l'application définie sur $Y(\Omega)$, à valeurs dans $[0,1]$ par la relation :

$$y_i\rightarrow p(Y=y_i/_{X=x_i})=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$$

Exemple : Reprenons l'exemple précèdent et déterminons toutes les lois conditionnelles :
a) `Tirage avec remise`

$^X/Y=0$	0	1
p	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

$^X/Y=1$	0	1
p	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

par exemple : $p(X=0/_{Y=1})=\frac{\frac{9}{49}}{\frac{3}{7}}=\frac{3}{7})$

$^Y/X=0$	0	1
p	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

$^Y/X=1$	0	1
p	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

On remarque que le conditionnement de X (ou de Y) par n'importe quelle valeur de Y (ou de X) n'affecte pas la loi de X (ou Y), c'est-à-dire $X/_{Y=j}=X$ et $Y/_{X=i}=Y$
b) `Tirage sans remise`

$^X/Y=0$	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$^X/Y=1$	0	1
p	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

par exemple $p(X=0/_{Y=1})=\frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{7}}=\frac{2}{3})$

$^Y/X=0$	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$^Y/X=1$	0	1
p	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

Dans ce cas, le conditionnement a eu un effet. Par exemple $X/_{Y=0}\neq X$ ou $Y/_{X=1}\neq Y$. Il est normal que dans un tirage sans remise, la connaissance du résultat de la première tirage influe sur la loi de la deuxième.

4.3 L'indépendance

Définition 4.3 *Soit $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),p)$ un espace probabilisé fini et $\vec{C}=(X,Y)$ un couple de variables aléatoires, on dit les v.a.r X et Y sont indépendantes si :*

$$p((X=x_i)\cap(Y=y_j))=p(X=x_i)\times p(Y=y_j))\, pour\, (i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]$$

ou encore :

$$p_{ij}=p_{i.}\times p_{.j}\, pour\, (i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]$$

Exemple : Les deux variables X et Y, considérés dans l'exemple précèdent, sont indépendantes dans le cas de tirage avec remise et ne sont pas indépendantes dans le cas de tirage sans remise.

Exercice 4 *Une urne contient une boule porte le numéro 1, deux boules portent le numéro 2 et trois boules portent le numéro 3. On détermine un entier n à trois chiffres en tirant successivement et avec remise 3 boules de l'urne. On suppose que les tirages sont équiprobables.*
La première boule tirée fournit le chiffre des centaines de n, le deuxième tirage indique le chiffre des dizaines et le troisième tirage indique le chiffre des unités.

1. *Calculer les probabilités des l'événements :*
   A *" obtenir un entier constitué par trois chiffres impairs "*
   B *" obtenir un nombre pair "*
2. *Soit X la variable aléatoire égale au nombre des chiffres pairs dans l'entier n et Y la v.a.r égale 0 si n pair et 1 si n impair.*
   a) Donner la loi du couple (X,Y).
   b) Les v.a.r X et Y sont-ils indépendantes ?

---

1. Puisque le tirage est avec remise alors $\text{card}\Omega = 6^3$.
   • A est réalisé si on a tiré trois boules parmi les quatre qui portent les numéros impairs, donc $\text{card}A = 4\times4\times4$ et $p(A) = (\frac{4}{6})^3 = \frac{8}{27}$
   • B est réalisable si et seulement si on a obtenu, dans le troisième tirage, une boule portant un numéro pair, donc $\text{card}B = 6\times6\times2$ et $p(B) = \frac{1}{3}$.
2. a) On a :
$$X(\Omega) = \{0,1,2,3\}\, et\, Y(\Omega) = \{0,1\}$$
   L'événement $(X = 0, Y = 0)$ signifie qu'on obtient un nombre pair qui contient aucun chiffre pair, ceci est impossible donc $p_{00} = p(X = 0, Y = 0) = 0$
   L'événement $(X = 0, Y = 1)$ signifie qu'on obtient un nombre impair qui contient aucun chiffre pair, c'est-à-dire $A = (X = 0, Y = 1)$, donc $p_{01} = p(A) = \frac{8}{27}$
   L'événement $(X = 1, Y = 0)$ signifie qu'on obtient un nombre pair qui contient un seul chiffre pair,
$$\begin{aligned} p_{10} &= p(X=1,Y=0) \\ &= \frac{4\times4\times2}{6^3} \\ &= \frac{4}{27} \end{aligned}$$
   De même on trouve :
$$p_{11} = \frac{8}{27}, p_{20} = \frac{4}{27}, p_{21} = \frac{2}{27}, p_{30} = \frac{1}{27}, p_{31} = 0$$

$X \backslash Y$	0	1	Loi de X
0	0	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{27}$
1	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$
2	$\frac{4}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{6}{27}$
3	$\frac{1}{27}$	0	$\frac{1}{27}$
Loi de Y	$\frac{9}{27}$	$\frac{18}{27}$	1

   b) On a, par exemple, $p(X = 0, Y = 0) = 0$ et $p(X = 0)\times p(Y = 0) = \frac{8}{27}.\frac{9}{27}$, donc $p(X = 0, Y = 0) \neq p(X = 0)\times p(Y = 0)$ et les v.a.r X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 5 *Montrer le résultat suivant :*
Deux variables aléatoires sont indépendantes si et seulement si, le rang de la matrice associée A ($A = (p_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le m}$) est égal à 1.

4.4 Covariance, coefficient de corrélation linéaire

4.4.1 Espérance de $u(X,Y)$

Soient X et Y deux v.a.r sur Ω.
L'espérance de $Z=u(X,Y)$ (u fonction réelle à deux variables) est donné par la formule suivante :

$$E(Z)=\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} u(x,y)p(X=x,Y=y)$$

Cas particuliers :

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} (x+y)p(X=x,Y=y) \\ &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xp(X=x,Y=y) &= \sum_{x\in X(\Omega)} [\sum_{y\in Y(\Omega)} xp(X=x,Y=y)] \\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} x[\sum_{y\in Y(\Omega)} p(X=x,Y=y] \end{aligned}$$

De plus

$$\sum_{y\in Y(\Omega)} p(X=x,Y=y)=p(X=x)$$

D'où

$$\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xp(X=x,Y=y)=\sum_{x\in X(\Omega)} xp(X=x)=E(X)$$

De même, on a :

$$\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} yp(X=x,Y=y)=E(Y)$$

Conclusion :

$$\boxed{E(X+Y)=E(X)+E(Y)}$$

• $E(XY)=\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyp(X=x,Y=y)$
De plus, si X et Y sont indépendantes, alors :

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyp(X=x,Y=y) \\ &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyp(X=x)p(Y=y) \\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} xp(X=x)\sum_{y\in X(\Omega)} yp(X=y) \\ &= E(X)E(Y) \end{aligned}$$

Donc si X et Y sont deux v.a.r **indépendantes**, alors

$$\boxed{E(XY)=E(X)E(Y)}$$

4.4.2 Covariance

Définition 4.4 *Soit $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),p)$ un espace probabilisé fini et $\vec{C}=(X,Y)$ un couple de variables aléatoires. Le nombre :*

$$E[(X-E(X))(Y-E(Y)]$$

est appelé ***covariance*** *de X et Y et noté $Cov(X,Y)$.*

Proposition 4.1 **Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω, alors $E[(X-E(X))(Y-E(Y)]=E(X.Y)-E(X)E(Y)$.**

Démonstration : En effet : On a :

$$E[(X-E(X))(Y-E(Y)] = E[XY - E(Y)X - E(X)Y + E(X)E(Y)]$$

et l'espérance étant un application linéaire, il vient :

$$\begin{aligned} E[(X-E(X))(Y-E(Y)] &= E(XY) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\ &= E(X.Y) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

□

Exemple : Soient X et Y de loi $\mathscr{B}(1,p)$, alors $Cov(X,Y) = p(X=1,Y=1) - p^2$.
En effet, $E(XY) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyp(X=x,Y=y) = p(X=1,Y=1)$

Théorème 4.2 **Soit X,Y,X',Y' des variables aléatoires sur $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),p)$. Alors :**

1. $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
2. $Cov(X+X',Y) = Cov(X,Y) + Cov(X',Y)$ **et** $Cov(X,Y+Y') = Cov(X,Y) + Cov(X,Y')$
3. $Cov(\lambda X,Y) = Cov(X,\lambda Y) = \lambda Cov(X,Y)$
4. $Cov(X,X) = Var(X) \geq 0$
5. $Var(X+Y) = Var(X) + 2Cov(X,Y) + Var(Y)$
6. **Si X et Y indépendantes alors $Cov(X,Y) = 0$.**

Démonstration : La preuve ne pose aucun problème. □

Lemme 4.1 **Soit X une v.a.r. Si $Var(X) = 0$ alors X est constante.**

Démonstration :

$$\begin{aligned} Var(X) = \sum_{i=1}^{n}[x_i - E(X)]^2 p(X=x_i) = 0 &\iff \forall i \in [\![1,n]\!], [x_i - E(X)]^2 p(X=x_i) = 0 \\ &\iff \forall i \in [\![1,n]\!], x_i - E(X) = 0 \\ &\iff \forall i \in [\![1,n]\!]; x_i = E(X) \end{aligned}$$

donc $X(\Omega) = \{E(X)\}$ et par suite X est la variable constante égale à $E(X)$. □

Théorème 4.3 **Soit X,Y deux variables aléatoires sur $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),p)$. Alors :**

$$|Cov(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)(*)$$

L'égalité ayant lieu si et seulement si $Y = aX + b$ (a,b des réels).

Démonstration : On pose, pour tout $\lambda \in \mathbb{R} T(\lambda) = Var(\lambda X + Y)$, alors :

$$\begin{aligned} T(\lambda) &= Var(\lambda X + Y) \\ &= Var(\lambda X) + 2Cov(\lambda X, Y) + Var(Y) \\ &= \lambda^2 Var(X) + 2\lambda Cov(X,Y) + Var(Y) \end{aligned}$$

• Si $Var(X) \neq 0$, T est un trinôme du second degré en λ, trinôme ≥ 0 pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ Ainsi

$$\triangle' = [Cov(X,Y)]^2 - Var(X)Var(Y) \leq 0$$

C'est-à-dire

$$|Cov(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y) (\sigma(X) = \sqrt{Var(X)})$$

• Si $Var(X) = 0$ dans ce cas X et Y sont indépendantes et $Cov(X,Y) = 0$, donc $(*)$ est vérifié.
Cas d'égalité :
Si $|Cov(X,Y)| = \sigma(X)\sigma(Y)$, $T(\lambda)$ admet une racine double c : $T(c) = Var(cX+Y) = 0$, $cX+Y$ est donc une v.a.r constante b (d'après le lemme).
On a donc $cX + Y = b \Longrightarrow Y = -cX + b = aX + b \ \ (c = -a)$. □

4.4.3 Coefficient de corrélation linéaire

Définition 4.5
Soit X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$. On dit que X et Y sont corrélées lorsque $Cov(X,Y) \neq 0$).
On appelle coefficient de corrélation linéaire de X et Y et on note $\varrho(X,Y)$ le nombre $\dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

Proposition 4.2 **Soit X, Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$. Alors :**
1) $-1 \leq \varrho(X,Y) \leq 1$.
2) Si X et Y sont indépendantes alors, $(X,Y) = 0$.
3) Si $\varrho(X,Y) = 1$ (rep.-1), alors il existe $a > 0$ (resp.$a < 0$) et une constante b tel que $Y = aX + b$.

Exercice 6 *Soit X une variable uniforme sur $\{-1,0,1\}$, c'est-à-dire :*

$$X(\Omega) = \{-1,0,1\} \quad et \quad p(X=-1) = p(X=0) = p(X=1) = \frac{1}{3}$$

Calculer $\varrho(X^n, X^m)$ avec $(n,m) \in \mathbb{N}^2$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a : Si k est pair :

$$E(X^k) = (-1)^k p(X=-1) + 0^k.p(X=0) + 1^k.p(X=1) = \frac{2}{3}$$

et

$$Var(X) = E(X^{2k}) - E^2(X^k) = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

Si k est impair

$$\begin{array}{rcl} E(X^k) & = & (-1)^k p(X=-1) + 0^k.p(X=0) + 1^k.p(X=1) \\ & = & -p(X=-1)) + p(X=1) = 0 \end{array}$$

et

$$Var(X) = E(X^{2k}) - E^2(X^k) = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

Calculons $\varrho(X^n, X^m) = \dfrac{Cov(X^n, X^m)}{\sigma(X^n)\sigma(X^m)}$

$$\varrho(X^n, X^m) = \frac{E(X^{n+m}) - E(X^n)E(X^m)}{\sqrt{Var(X^n).Var(X^m)}}$$

• Si n et m sont pairs.

$$\varrho(X^n, X^m) = \frac{\frac{2}{3} - (\frac{2}{3})^2}{\sqrt{\frac{2}{9} \times \frac{2}{9}}} = 1$$

• Si n est pair et m impair ou si n impair et m pair.

$$\varrho(X^n, X^m) = \frac{0 - 0 \times (\frac{2}{3})^2}{\sqrt{\frac{2}{9} \times \frac{2}{3}}} = 0$$

• Si n et m sont impairs.

$$\varrho(X^n, X^m) = \frac{\frac{2}{3} - 0 \times 0}{\sqrt{\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}}} = 1$$

••••••••••

Problèmes sur les probabilités

Problème I

Première partie

Une urne contient 7 boules : 5 blanches et 2 noires. Un joueur extrait simultanément deux boules de l'urne.

1. Calculer la probabilité qu'il tire deux boules blanches.
2. Le joueur participe maintenant au jeu suivant :
   (a) s'il tire deux boules blanches il gagne x francs ($x \geq 0$) ;
   (b) s'il tire deux boules noires il perd $10x$ francs ;
   (c) s'il tire une boule blanche et une boule noire, il procède à un second tirage de deux boules, sans remettre les deux premières boules tirées : à l'issue de second tirage il gagne y francs s'il tire deux boules blanches, sinon il perd 3 francs.

   On désigne par G la v.a.r dont les valeurs sont égales aux gains (**positifs** ou **négatifs**) du joueur.
3. Donner la loi de probabilité de la v.a.r G.
4. Calculer, en fonction de y, l'espérance mathématique de G. déterminer y pour que le jeu soit équitable, c'est à dire $E(G) = 0$.
5. s'il tire une boule blanche et une boule noire, il procède à un second tirage de deux boules, sans remettre les deux premières boules tirées : à l'issue de second tirage il gagne y francs s'il tire deux boules blanches, sinon il perd 3 francs.
   Pour cette valeur de y, calculer l'écart-type $\sigma(G)$ de la variable G en fonction de x.

Deuxième partie

Soit la fonction f, définie pour tout réel x, par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{110x^2 + 60}{21}}$$

1. Déterminer le réel α tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - \alpha x] = 0$
   Quel est le signe de $f(x) - \alpha x$ pour $x \geq 0$?
2. Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative (C) et ses asymptotes dans un repère orthonormé (unité : 1.5 cm).
3. Déterminer l'entier naturel x pour lequel l'écart-type $\sigma(G)$ de la première partie est compris entre 7 et 8.

•••••••••

Problème II

On considère le jeu électronique suivant :
Un point lumineux L se déplace par sauts successifs sur un axe d'origine O, et peut à chaque instant se situer en l'un des cinq points P_j d'abscisses j égales à : $-2; -1; 0; 1; 2$.
Lorsque le point L est en P_j, $j \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ à l'instant t, la probabilité pour qu'il se positionne en P_k, $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ à l'instant $t+1$ est fournie par le tableau ci-dessous :

instant t \ instant $t+1$	P_{-2}	P_{-1}	P_0	P_1	P_2
P_{-2}	0	1	0	0	0
P_{-1}	0.5	0	0.5	0	0
P_0	0	0.5	0	0.5	0
P_1	0	0	0.5	0	0.5
P_2	0	0	0	0	1

1. On désigne par X_n la v.a.r qui prend pour valeur l'abscisse du point lumineux à l'instant $t = n$
   (a) Déterminer les lois de probabilité des v.a.r X_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Calculer l'espérance mathématique et la variance des v.a.r X_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$.
   (b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (X_3, X_4).
2. (a) Déterminer la loi de probabilité de X_{n+1} en fonction de la loi de probabilité de X_n.
   (b) On désigne par a_n la probabilité de l'événement "$X_n = 0$". Établir une relation de récurrence de la forme :
   $$\alpha a_{n+2} + \beta a_n + \gamma a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2.$$
   (c) Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelles vérifiant la relation de récurrence :
   $$\alpha u_{n+1} + \beta u_n + \gamma u_{n-1} = 0, n \geq 1.$$
   (d) En déduire a_n. Démontrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

••••••••••

Problème III

On désire étudier sur un certain nombre d'années les mouvements migratoires d'une population lors des vacances d'été.
L'observation de cette population a conduit à la construction d'un modèle mathématique dont les hypothèses sont les suivantes :
H_1 : *Le territoire sur lequel évolue la population durant les vacances d'été est divisé en trois régions, notées* $1,2,3$.
H_2 : *Chaque année, tout individu de la population étudiée choisit une région et une seule pour y passer toutes les vacances d'été.*
H_3 : *Le choix d'une région par un individu pour y passer ses vacances d'été est un phénomène aléatoire qui évolue dans le temps à partir d'une année initiale appelée année* 1.
On note $A_i(n)$, pour $i \in \{1,2,3\}$ et $n \geq 1$, l'événement : " choisir la région i pour y passer ses vacances d'été, l'année n " et $\alpha_i(n) = p[A_i(n)]$, $i \in \{1,2,3\}$ la probabilité de choisir l'année n, la region i pour y passer ses vacances d'été.
H_4 : $\alpha_1(1) = 0.2; \quad \alpha_2(1) = 0.45; \quad \alpha_3(1) = 0.35$
H_5 : *La probabilité de choisir la région* i, $i \in \{1,2,3\}$, *pour y passer ses vacances l'année* $n+1$, *ne dépond que du choix effectué l'année* n.
On note $a_{ij} = p[A_i(n+1)/A_j(n)]$, $1 \leq i \leq 3, \;\; 1 \leq j \leq 3$, la probabilité de choisir la région i l'année $n+1$, sachant que l'année n, on choisi la région j.
On suppose que $\forall i,j \in \{1,2,3\}$, a_{ij} *est indépendant de l'année considérée et que les* a_{ij} *sont les éléments de la matrice* M *suivante :*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix}$$

H_6 : *On suppose que la population étudiée reste inchangée durant toutes les années prises en considération dans ce modèle.*

Question préliminaire :
Soit $A_1, A_2, ..., A_n$ une famille d'événements d'un univers Ω, avec $p(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_i) \neq 0$, $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$.
Montrer que

$$p(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = p(A_1)p(A_{2/A_1})p(A_{3/A_1 \cap A_2})...p(A_{n/A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}}).$$

Partie A

1. (a) Soit B_n l'événement " choisir chaque année la région 2 durant toutes les n premières années "
   Calculer $p(B_3)$.
   Exprimer $p(B_n)$ en fonction de n.
   (b) Sachant qu'un individu choisit la région 1 l'année 2, quelle est la probabilité qu'il ait choisi la région 2 l'année 1 ?
   (c) Calculer la probabilité pour qu'un individu change de région entre la première année et la deuxième année.

Partie B

2. (a) Exprimer, en le justifiant, une relation entre les matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(n+1) \\ \alpha_2(n+1) \\ \alpha_3(n+1) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1(n) \\ \alpha_2(n) \\ \alpha_3(n) \end{pmatrix}$$

   puis entre les matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(n+1) \\ \alpha_2(n+1) \\ \alpha_3(n+1) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1(1) \\ \alpha_2(1) \\ \alpha_3(1) \end{pmatrix}$$

   (b) On montre le résultat suivant : Il existe une matrice P inversible telle que $M = PDP^{-1}$, avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \;\; (\lambda = -0.1 + i\sqrt{0.11}) \;\; \text{et} \;\; P = \begin{pmatrix} 1 & x' & x'' \\ 1 & y' & y'' \\ 1 & z' & z'' \end{pmatrix}$$

   On pose $P^{-1} = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$

   Montrer que $M^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}^n \end{pmatrix} P^{-1}$

Définition 4.6 *On dit qu'une suite de matrices* $(U_n)_{n\geq 1}$ *d'éléments de* $\mathscr{M}_n\mathbb{C}$, $(U_n = (u_{ij}(n))_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq q})$ *converge vers une matrice* $L = (l_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq q}$ *quand* n *tend vers l'infini si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{ij}(n) = l$ *pour tout* $(i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,q]\!]$. *On note alors* $L = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Proposition 4.3 **Étant donné une suite de matrices $(U_n)_{n\geq 1}$ de type $(m\times q)$ à éléments de C, qui converge vers la matrice L , lorsque n tend vers l'infini et V, W deux matrices telles que les produits VL et LW soient définis, on a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} VU_n = VL$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_nW = LW$.**

3. (a) Montrer que la suite de matrices $(M^n)_{n\geq 1}$ converge et calculer sa limite.
   (b) Soient $U = (u_{ij})_{1\leq i\leq 3, 1\leq j\leq 3}$ et $V = (v_{ij})_{1\leq i\leq 3, 1\leq j\leq 3}$ deux matrices telles que la somme des éléments de chaque colonne de chacune d'elles soit égale à 1. Montrer qu'il est de même pour la matrice UV.
   (c) Déduire de ce qui précède les valeurs des éléments a, a', a'' de la matrice P^{-1}.
4. Montrer que les suites $(\alpha_1(n))_{n\geq 1}$, $(\alpha_2(n))_{n\geq 1}$, $(\alpha_3(n))_{n\geq 1}$ convergent. Calculer leurs limites.

••••••••••