

# Chapitre 26 CONIQUES

Mohamed TARQI

## Table des matières

|       |                                                                               |    |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1     | Introduction                                                                  | 1  |
| 2     | Définition d'une conique par foyer, directrice et excentricité                | 2  |
| 2.1   | Définition de la parabole                                                     | 2  |
| 2.2   | Définition bifocale de l'ellipse et l'hyperbole                               | 2  |
| 2.2.1 | Ellipse                                                                       | 2  |
| 2.2.2 | Hyperbole                                                                     | 4  |
| 3     | Équation cartésienne d'une conique                                            | 5  |
| 3.1   | Équation de la parabole                                                       | 5  |
| 3.2   | Equations des coniques à centre                                               | 5  |
| 3.2.1 | Équations de l'ellipse ( $a > c$ )                                            | 6  |
| 3.2.2 | Équations de l'hyperbole ( $a < c$ )                                          | 6  |
| 4     | Ensemble de points $M$ tels que $\frac{MF}{MH} = e$                           | 7  |
| 5     | Équation d'une conique en polaire                                             | 7  |
| 6     | Ensemble de points $M(x,y)$ tels que $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ | 10 |

## 1 Introduction

La première loi fut publiée par Kepler en 1609 dans l'ouvrage *Astronomia Nova* (Nouvelle astronomie). Cette loi fut déduite à partir de l'étude de l'orbite de la planète Mars. Cette étude avait été rendue possible grâce aux travaux d'observation de l'astronome danois Tycho Brahe. Tycho faisait ses observations à l'aide d'instruments simples, i.e. sans l'aide d'un télescope. Notons que Kepler a publié en 1609, ce qui est l'année où Galilée a commencé à scruter le ciel avec sa lunette. La première loi décrit la forme des orbites. Elle s'énonce comme suit : \_\_\_\_\_



Première loi de KEPLER

*Les planètes décrivent des orbites en forme d'ellipses dont le Soleil occupe un des foyers.*

Une ellipse est une forme géométrique simple qu'on peut tracer de la façon suivante : on plante deux punaises sur un carton et on enfle autour de ces punaise une corde nouée en boucle. Ensuite, on étire la corde avec la pointe d'un crayon et on tourne en traçant la ligne. La forme résultante sera une ellipse. Les deux punaises représentent les foyers de l'ellipse. Un cercle est une ellipse où les deux foyers sont superposés.

## 2 Définition d'une conique par foyer, directrice et excentricité

### 2.1 Définition de la parabole

**Définition 2.1** On appelle parabole  $(\mathcal{P})$  l'ensemble des points du plan équidistants d'un point fixe  $F$  et d'une droite fixe  $D$  ne passant pas par  $F$ .

Le point  $F$  est appelé foyer de la parabole et la droite  $D$  directrice.

Soit  $H$  la projection orthogonale de  $F$  sur  $D$ ; la distance  $FH = p$  s'appelle paramètre. Soit  $P$  la projection de  $M$  sur  $D$ . On a l'équivalence :

$$M \in (\mathcal{P}) \iff MF = MP.$$

#### Propriétés

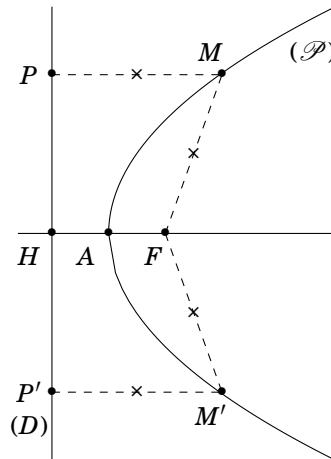
La droite  $(FH)$  est axe de symétrie ; en effet, si  $M'$  est le symétrique de  $M$  par rapport à la droite  $(FH)$  et si  $P'$  est la projection orthogonale de  $M'$  sur  $(D)$ , on a :

$$1. \quad MF = M'F, \quad MP = M'P',$$

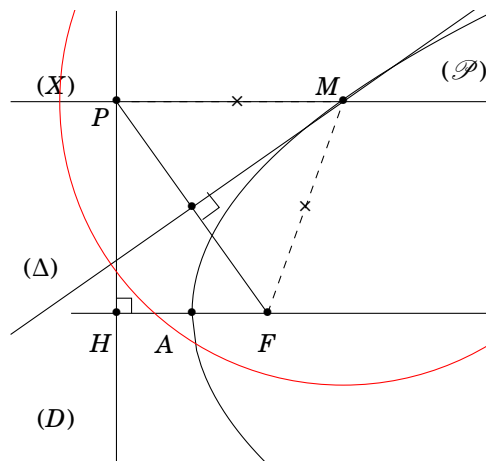
donc

$$MF = MP \iff M'F = M'P'.$$

$(FH)$  s'appelle l'axe focal de  $(\mathcal{P})$ .



2. Un point  $A$  de la droite  $(FH)$  appartient à  $\mathcal{P}$  si, et seulement si,  $AH = AF$ . Donc le seul point de la droite  $(FH)$  appartenant à  $(\mathcal{P})$  est le milieu de segment  $[FH]$ . le point  $A$  s'appelle la *sommet* de la parabole.



**Construction par points :** Soit  $(X)$  la droite perpendiculaire à  $(D)$  en  $P$ . Il existe sur  $(X)$  un point  $M$  et un seul équidistant de  $F$  et de  $P$ . Ce point  $M$  est l'intersection de  $(X)$  et de la médiatrice  $(\Delta)$  de segment  $[FP]$ . En faisant varier  $P$  sur  $(D)$  on peut ainsi construire par points la parabole  $(\mathcal{P})$ .

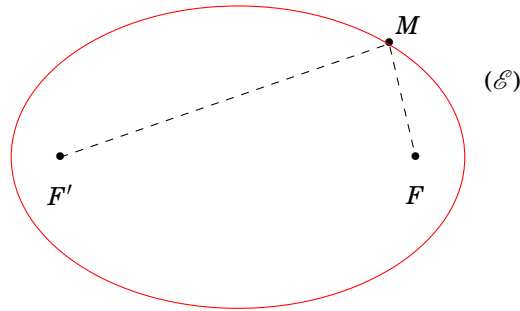
### 2.2 Définition bifocale de l'ellipse et l'hyperbole

#### 2.2.1 Ellipse

**Définition 2.2** On appelle ellipse  $(\mathcal{E})$  l'ensemble de points  $M$  du plan tels que la somme de leurs distances à deux points fixes  $F$  et  $F'$  ait une valeur constante  $2a$ .

$$M \in (\mathcal{E}) \iff MF + MF' = 2a.$$

Les points fixes  $F$  et  $F'$  s'appellent les foyers de l'ellipse, la distance  $FF' = 2c$  s'appelle distance focale. les segments variables  $[MF]$  et  $[MF']$  s'appellent les rayons focaux.



**Remarque :** L'existence du triangle  $(MFF')$  exige  $FF' < MF + MF'$ , d'où :  $2c < 2a$ , soit  $c < a$ .

**Proposition 2.1** La droite  $(FF')$  et la médiatrice  $(\Delta)$  de segment  $[FF']$  sont axes de symétries de  $(\mathcal{E})$ .

**Démonstration :** En effet, si  $M$  est le symétrique de  $M'$  par rapport à  $(FF')$ , on a :  $MF = M'F$  et  $MF' = M'F'$ , donc

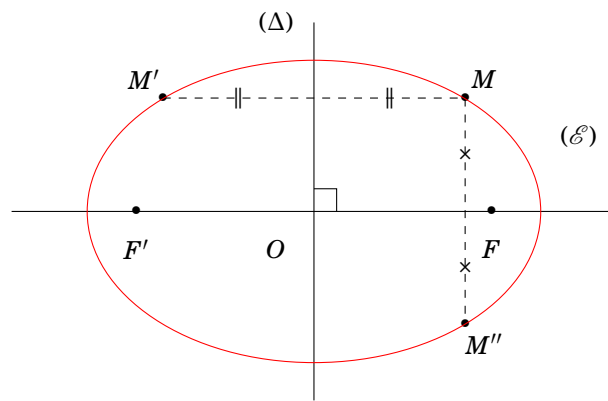
$$MF + MF' = 2a \iff M'F + M'F' = 2a,$$

c'est-à-dire  $M' \in (\mathcal{E})$ .

De même si  $M''$  est le symétrique de  $M$  par rapport à  $(\Delta)$ , on a :  $MF = M''F$  et  $MF' = M''F'$ , donc

$$MF + MF' = 2a \iff M''F + M''F' = 2a \iff M'' \in (\mathcal{E}).$$

□



**Remarque :** L'intersection  $O$  des axes  $(\Delta)$  et  $(FF')$  est un centre de symétrie de l'ellipse  $(\mathcal{E})$ , en effet  $S_O = s_{(\Delta)} \circ s_{(FF')}$ .

**Définition 2.3** La droite  $(FF')$  est appelée axe focal. La droite  $(\Delta)$  est appelée axe non focal. Le point  $O$  est appelé centre de l'ellipse.

**Remarques :**

1. Un point  $A$  de  $(\mathcal{E})$  ne peut appartenir au segment  $[FF']$ , car on aurait  $AF + AF' = FF' = 2c = 2a$ . Si le point  $A$  est situé sur la droite  $(FF')$  à l'extérieur du segment  $[FF']$ , on a :  $AF + AF' = 2AO$ .

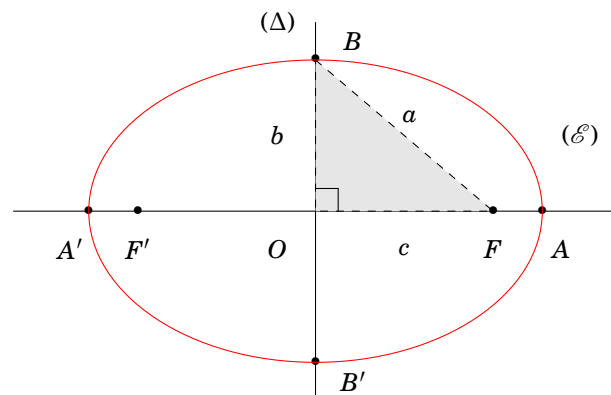
$$A \in (\mathcal{E}) \iff AF + AF' = 2a \iff 2AO = 2a \iff OA = a.$$

Il existe donc sur la droite  $(FF')$  deux points  $A$  et  $A'$  de l'ellipse tels que  $OA = OA' = a$ .

Pour que le point  $B$  de  $(\Delta)$  soit sur l'ellipse  $(\mathcal{E})$ , il faut et il suffit que  $BF + BF' = 2a$ , et comme  $BF = BF'$ , alors

$$2BF = 2a \iff BF = a$$

Tout point  $B$  se trouve à l'intersection de  $(\Delta)$  et du cercle  $\mathcal{C}(F, a)$ . Le cercle coupe  $(\Delta)$  en deux points  $B$  et  $B'$ . On pose  $b = OB$ , d'où  $b^2 = c^2 - a^2$ .



**Définition 2.4** La droite  $(AA')$  s'appelle le grand axe. La droite  $(BB')$  s'appelle le petit axe.

**Construction par points :** Soit  $M$  un point de l'ellipse  $(\mathcal{E})$  de foyers  $F$  et  $F'$ , et de grand axe  $2a$ . soit  $P$  le point de la droite  $(F'M)$  tel que  $MP = MF$ . On a :

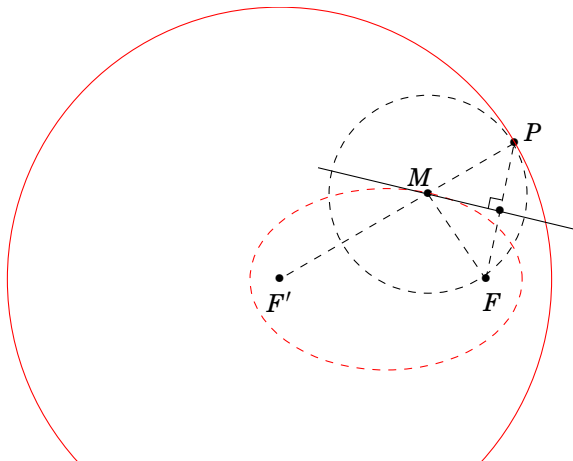
$$F'P = F'M + MP \iff F'M + MF = 2a,$$

qui entraîne  $P \in \mathcal{C}(F', 2a)$ .

Inversement ; soit  $P \in \mathcal{C}(F', 2a)$ . La médiatrice de  $[FP]$  coupe la droite  $(F'P)$  en un point  $M$ . Comme  $c < a$ , on a  $F'F < F'P$

$$MF + MF' = MP + MF' = F'P = 2a,$$

donc  $M \in (\mathcal{E})$ .

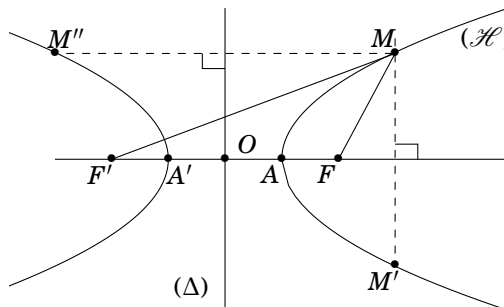


### 2.2.2 Hyperbole

**Définition 2.5** On appelle hyperbole  $(\mathcal{H})$  l'ensemble de points  $M$  du plan tels que la différence de leurs distances à deux points fixes  $F$  et  $F'$  ait une valeur constante  $2a$ .

$$M \in (\mathcal{H}) \iff |MF - MF'| = 2a.$$

Les points fixes  $F$  et  $F'$  s'appellent les foyers de l'ellipse, la distance  $FF' = 2c$  s'appelle distance focale. les segments variables  $[Mf]$  et  $[MF']$  s'appellent les rayons focaux.



**Remarque :** L'existence du triangle  $MFF'$  exige  $|MF - MF'| < FF'$ , d'où :  $2a < 2c$ , soit  $a < c$ .

**Proposition 2.2** La droite  $(FF')$  et la médiatrice  $(\Delta)$  de segment  $[FF']$  sont axes de symétries de  $(\mathcal{H})$ .

**Démonstration :** Soit les symétriques  $M'$  et  $M''$  de  $M$  par rapport à  $(FF')$  et  $(\Delta)$ , on a :

$$|MF - MF'| = 2a \iff |M'F - M'F'| = 2a \iff |M''F - M''F'| = 2a.$$

□

**Définition 2.6** La droite  $(FF')$  s'appelle l'axe transverse de l'hyperbole  $(\mathcal{H})$ .

**Remarque :** Le point  $O$  intersection des axes  $(\Delta)$  et  $(FF')$  est un centre de symétrie de l'hyperbole  $(\mathcal{H})$ .

**Définition 2.7** La droite  $(FF')$  est appelée axe focal, la droite  $(\Delta)$  est appelée axe non focal, et le point  $O$  est appelé centre de l'hyperbole.

**Remarques :**

1. Si un point  $A$  de la droite  $(FF')$  appartient à  $(\mathcal{H})$  il est intérieur au segment  $[FF']$ , car sinon on aurait  $|AF - AF'| = FF' = 2c \neq 2a$ . Si le point  $A$  est situé sur le segment  $[OF]$ , on a :

$$|AF - AF'| = 2a \iff |c + OA - (c - OA)| = 2a \iff OA = a.$$

Il existe donc un point et un seul sur le segment  $[OF]$  et de même un point  $A'$  et un seul sur le segment  $[OF']$ . Les points  $A$  et  $A'$  sont appelés les sommets de l'hyperbole.

2. Il n'existe pas de point  $M \in (\Delta)$  sur l'hyperbole  $(\mathcal{H})$ , car si  $M \in (\mathcal{H})$  on aurait  $MF - MF' = 0$ .

**Construction par points :** Soit  $M$  un point de l'hyperbole ( $\mathcal{H}$ ) de foyers  $F$  et  $F'$ , et d'axe transverse  $2a$ . Soit  $P$  le point de la droite  $(F'M)$  tel que  $MP = MF$ . On a :

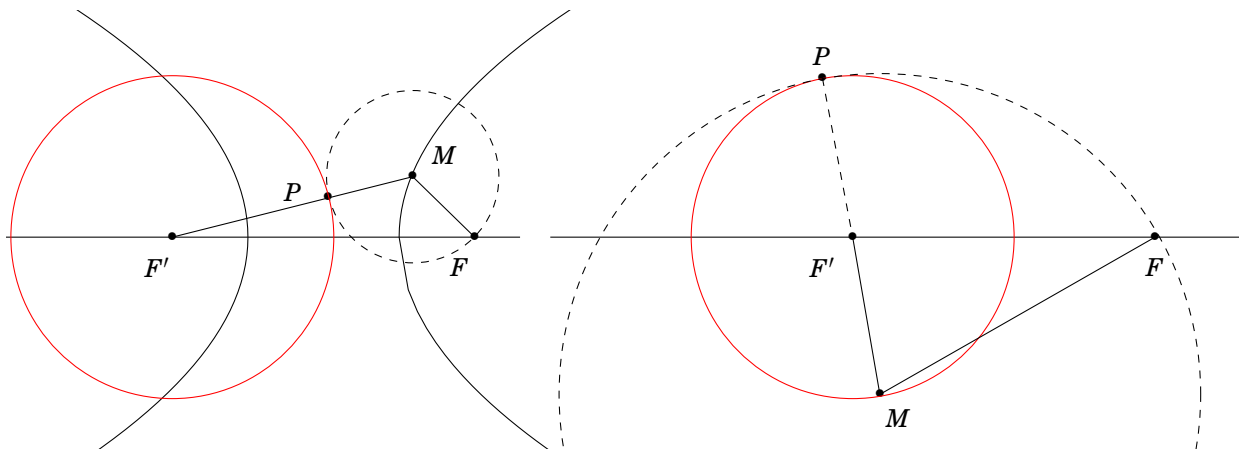
$$F'P = |F'M - MF| = 2a,$$

qui entraîne  $\varphi \in \mathcal{C}(F', 2a)$ .

Inversement, soit un  $\mathcal{C}(F', 2a)$  et un point  $F$  extérieur à ce cercle. Si  $M$  est centre d'un cercle passant par  $F$  et tangent en  $P$  à  $\mathcal{C}(F', 2a)$ , dans tous les cas  $M$  est extérieur au segment  $[FP']$  donc

$$|MF - MF'| = |MP - MF'| = PF' = 2a.$$

Le point  $M$  appartient à l'hyperbole de foyers  $F$  et  $F'$  et d'axe transverse  $2a$ .



### 3 Équation cartésienne d'une conique

#### 3.1 Équation de la parabole

Soit une parabole ( $\mathcal{P}$ ) de foyer  $F$ , de directrice  $(D)$ , de paramètre  $p$ . Prenons le sommet  $O$  comme origine des coordonnées, l'axe  $\overrightarrow{OF}$  (orienté de  $O$  vers  $F$ ) pour axe des abscisses et l'axe perpendiculaire à  $(OF)$  passant par  $O$  pour axes des ordonnées.

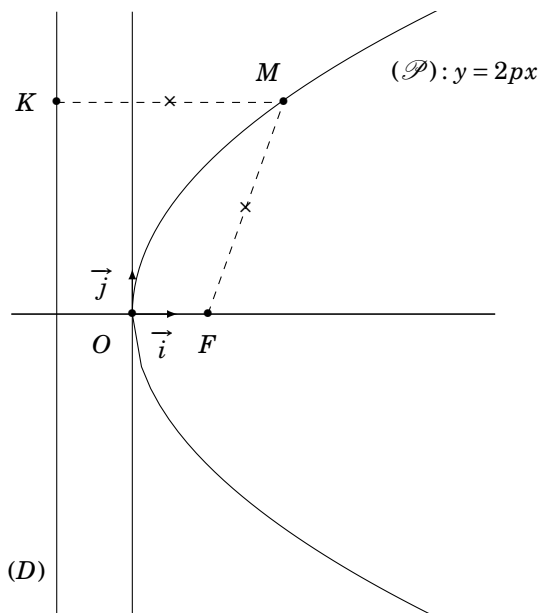
- $\vec{i}$  un vecteur unitaire de  $(OF)$ .
- $\vec{j}$  un vecteur unitaire de  $(\Delta)$ .

Dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  les coordonnées de  $F$  sont  $(\frac{p}{2}, 0)$ ,

l'équation cartésienne de  $(D)$  est  $x = \frac{-p}{2}$ .

Soit  $M(x, y)$  un point du plan et  $K$  sa projection orthogonale sur  $(D)$ .

$$\begin{aligned} M \in (\mathcal{P}) &\iff MF = MK \\ &\iff MF^2 = MK^2 \\ &\iff \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 - \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0 \\ &\iff y^2 = 2px. \end{aligned}$$



**Définition 3.1** L'équation  $y^2 = 2px$  s'appelle l'équation réduite de la parabole ( $\mathcal{P}$ ).

#### 3.2 Equations des coniques à centre

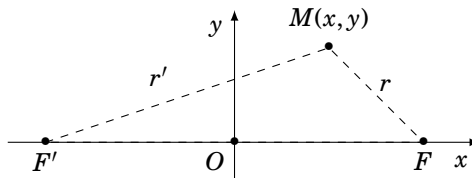
Soit une conique ( $\mathcal{C}$ ) à centre  $O$  (hyperbole ou ellipse), de foyer  $F$  et  $F'$ ,  $A$  et  $A'$  sont les sommets portés par la droite  $(FF')$ . On pose  $AA' = 2a$  et  $FF' = 2c$ .  $(\Delta)$  désigne l'axe non focal de ( $\mathcal{C}$ ). Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé direct tel que :

- $\vec{i}$  soit un vecteur unitaire de  $(F'F)$ .
- $\vec{j}$  soit un vecteur unitaire de  $(\Delta)$ .

Dans ce repère les coordonnées des foyers sont  $F(c,0)$  et  $F'(-c,0)$ . Soit un point quelconque  $M(x,y)$  de la conique  $(\mathcal{C})$ .

Posons  $MF = r$ ,  $MF' = r'$  avec  $r^2 = (x-c)^2 + y^2$  et  $r'^2 = (x+c)^2 + y^2$ . Considérons le produit  $P = (r+r'-2a)(r+r'+2a)(r-r'-2a)(r-r'+2a)$ . On a :

$$\begin{aligned} P &= [(r+r')^2 - 4a^2][(r-r')^2 - 4a^2] \\ &= (r^2 - r'^2)^2 - 8a^2(r^2 + r'^2) + 16a^4 \\ &= 16a^2(c^2 - a^2) \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} - 1 \right). \end{aligned}$$



### 3.2.1 Équations de l'ellipse ( $a > c$ )

$M(x,y)$  appartient à l'ellipse  $(\mathcal{E})$  si, et seulement si,  $MF + MF' = 2a$ , c'est-à-dire  $r + r' - 2a = 0$ . Mais  $|r - r'| \leq 2c < 2a$ , on peut donc écrire les équivalences :

$$r + r' - 2a = 0 \iff P = 0 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

ou, comme  $a^2 - c^2 = b^2$  :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

**Définition 3.2** L'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  s'appelle l'équation réduite de l'ellipse ( $b^2 = a^2 - c^2$ ).

### 3.2.2 Équations de l'hyperbole ( $a < c$ )

$M(x,y)$  appartient à l'hyperbole  $(\mathcal{H})$  si, et seulement si,  $|MF - MF'| = 2a$ , c'est-à-dire  $r - r' - 2a = 0$  et  $r - r' + 2a = 0$ . Mais  $|r + r'| \geq 2c > 2a$ , on peut donc écrire les équivalences :

$$(r - r' - 2a)(r - r' + 2a) = 0 \iff P = 0 \iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

soit, en posant  $b^2 = a^2 - c^2$  :  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

**Définition 3.3** L'équation  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  s'appelle l'équation réduite de l'hyperbole.

## 4 Ensemble de points $M$ tels que $\frac{MF}{MH} = e$

On se donne un point  $F$ , une droite  $(D)$  ne passant pas par  $F$  et un réel strictement positif  $e$ , et soit  $(\Gamma)$  l'ensemble des points du plan tels que  $\frac{MF}{d(M,(D))} = e$  où  $d(M,(D))$  désigne la distance d'un point  $M$  à une droite  $(D)$ . Ainsi, en notant  $H$  la projection orthogonal du point  $M$  sur la droite  $(D)$ ,

$$\begin{aligned} M \in (\Gamma) &\iff MF = eMH \\ &\iff MF^2 = e^2 MH^2. \end{aligned}$$

On choisit un repère direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  tel que le point  $F$  ait pour coordonnées  $(c, 0)$  ( $c > 0$ ) et tel que  $(OF)$  soit orthogonale à  $(D)$ . Si la droite  $(D)$  est à droite du point  $F$ , alors l'équation de  $(D)$  serait de la forme  $x = \frac{a^2}{c}$ . Un point  $A$  entre  $F$  et  $K$ , de coordonnées  $(x, 0)$ , appartient à  $(\Gamma)$  si, et seulement si,  $x - a = \frac{(c-a)(c-ea)}{a(1+c)} = 0$  ou encore si, et seulement si,  $a = \frac{c}{e}$ .

$$\begin{aligned} M(x, y) \in (\Gamma) &\iff MF^2 = e^2 MH^2 \\ &\iff (c-x)^2 + y^2 = e^2 \left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2 = \frac{e^2}{c^2} (cx - a^2)^2 \\ &\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \end{aligned}$$

D'où le théorème :

**Théorème 4.1** Étant donné un point  $F$ , une droite  $(D)$  ne passant pas par  $F$ , un nombre réel strictement positif  $e$ . L'ensemble

$$(\Gamma) = \{M \in \mathcal{P} / \frac{MF}{d(M,(D))} = e\}$$

est :

1. la parabole de foyer  $F$ , de directrice  $(D)$  si  $e = 1$  ;
2. l'ellipse de foyer  $F$ , de directrice  $(D)$  si  $e < 1$  ;
3. l'hyperbole de foyer  $F$ , de directrice associée  $(D)$  si  $e > 1$ .

## 5 Équation d'une conique en polaire

On utilise les coordonnées polaires dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .  $(\Gamma)$  une conique de foyer  $O$ , de directrice  $(D)$  et d'excentricité  $e > 0$ . Soit  $(\Delta)$  l'axe focal de  $(\Gamma)$ , tel que le point  $K$ , intersection de  $(D)$  et  $(\Delta)$ , ait une abscisse strictement positive.

**Théorème 5.1** Soit  $(D)$  une droite du plan. Une équation polaire de la conique d'excentricité  $e$ , de foyer  $O$  et de directrice  $(D)$ , est :

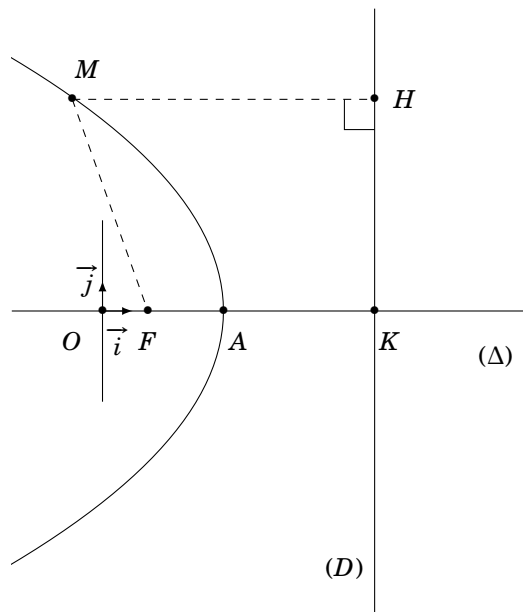
$$r = \frac{ed}{1 + e \cos(\theta)},$$

où  $d$  est la distance de  $O$  à  $(D)$ .

**Démonstration :**

$$M(r, \theta) \in (\Gamma) \iff OM = ed(M, (D)) \iff |r| = e|r \cos(\theta) - d| \iff \begin{cases} r = e(r \cos(\theta) - d) \\ \text{ou} \\ r = -e(r \cos(\theta) - d) \end{cases}$$

Ainsi  $M(r, \theta) \in (\Gamma)$  si, et seulement si,  $r = \frac{-ed}{1 - e \cos(\theta)}$  ou  $r = \frac{ed}{1 + e \cos(\theta)}$ . Comme les points de coordonnées polaires  $(r, \theta)$  et  $(-r, \theta + \pi)$  sont égaux, les deux courbes d'équations polaires :



$$r = \frac{-ed}{1 - e \cos(\theta)} \text{ ou } r = \frac{ed}{1 + e \cos(\theta)}$$

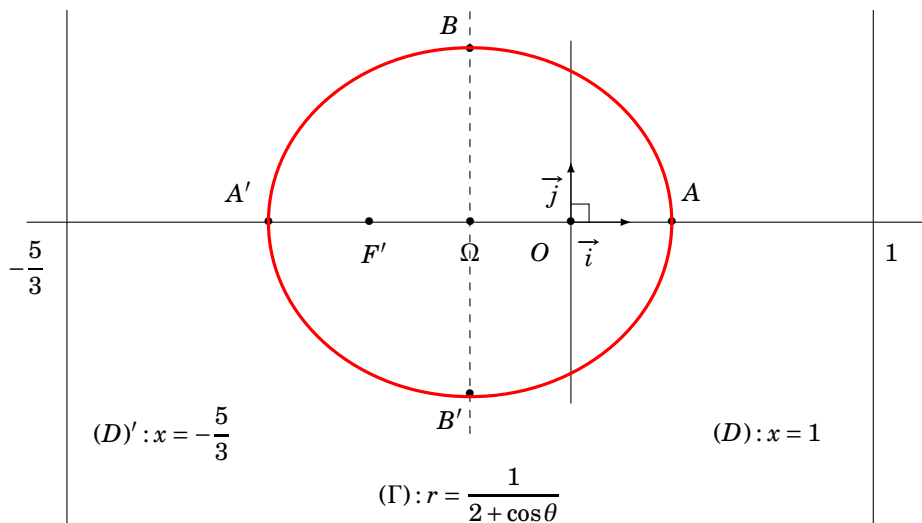
sont les mêmes et on en déduit qu'une équation polaire de la conique est par exemple :

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos(\theta)}.$$

□

**Exemple :** 1. La nature de la courbe  $(\Gamma)$  d'équation polaire :  $r = \frac{1}{2 + \cos \theta}$ .

On a  $r = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cos \theta}$ , donc  $\Gamma$  est une ellipse dont un des foyers est  $O$  et d'axe focal  $(Ox)$ , d'excentricité  $e = \frac{1}{2}$ . Les sommets du grand axe sont les intersections de la courbe avec  $(Ox)$ , à savoir  $A = M\left(\frac{1}{3}, 0\right) = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$  et  $A' = M(1, \pi) = (-1, 0)$ . Le centre de  $\Gamma$  est le milieu de segment  $[A, A']$ , soit  $\Omega\left(\frac{-1}{3}, 0\right)$ . Le deuxième foyer est  $F' = \left(\frac{-2}{3}, 0\right)$ . Ensuite,  $a = \frac{1}{2}AA' = \frac{2}{3}$  et  $c = \frac{1}{2}F'O = \frac{1}{3}$ . Donc  $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Les sommets du petit axe sont donc  $B = \left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  et  $B' = \left(\frac{-1}{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ . Enfin les directrices sont  $(D) : x = 1$  et  $(D') : x = -\frac{5}{3}$ .



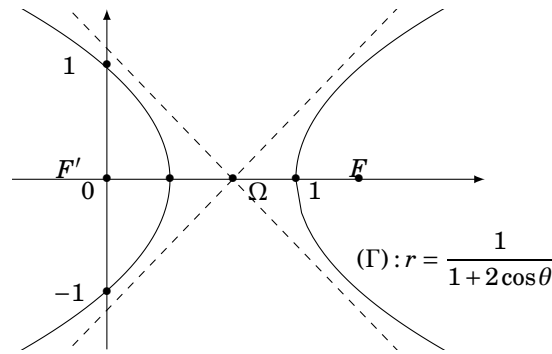
2. La nature de la courbe  $(\Gamma)$  d'équation polaire :

$$r = \frac{1}{1 + 2 \cos \theta}.$$

$(\Gamma)$  est une conique d'excentricité 2 et donc une hyperbole. L'axe focal est  $(Ox)$ . Les sommets sont les points d'intersection de  $\Gamma$  et  $(Ox)$  c'est-à-dire les points  $M(0)$  et  $M(\pi)$  de coordonnées cartésiennes respectives  $A'\left(\frac{1}{3}, 0\right)$  et  $A(1, 0)$ .

Le centre  $\Omega$  est le milieu de  $[AA']$  c'est-à-dire  $\Omega\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ . L'un des foyers est  $F' = O$  et l'autre est le symétrique de  $F'$  par rapport à  $\Omega$ , c'est le point  $F\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ . Puisque  $a = \frac{1}{3}$  et  $e = 2$ , les directrices sont les droites d'équation  $x = x_{\Omega} - \frac{a}{e} = \frac{1}{2}$  et  $x = \frac{5}{6}$ .





**Théorème 5.2** Si un objet se déplace dans un champ de force central inversement proportionnel au carré de la distance entre le centre de l'objet et le centre de force, alors la trajectoire suivie par l'objet est une conique.

**Démonstration :** La démonstration est basée sur la deuxième loi fondamentale de la dynamique de NEWTON :  $\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{\gamma}$ . On place l'origine du système de référence au centre de force et on utilise les coordonnées polaires.

On note

$$\vec{M}(t) = r(t) \cos \theta(t) \vec{i} + r(t) \sin \theta(t) \vec{j}$$

le vecteur position de l'objet. Calculons  $\vec{v}$  et  $\vec{\gamma}$  les vecteurs vitesse et accélération, on a :

$$\vec{v}(t) = [r'(t) \cos \theta(t) - r(t) \sin \theta(t) \theta'(t)] \vec{i} + [r'(t) \sin \theta(t) + r(t) \cos \theta(t) \theta'(t)] \vec{j}$$

et

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(t) = & [r''(t) \cos \theta(t) - 2r'(t) \sin \theta(t) \theta'(t) - r(t) \cos \theta(t) (\theta'(t))^2 - r(t) \sin \theta(t) \theta''(t)] \vec{i} \\ & + [r''(t) \sin \theta(t) + 2r'(t) \sin \theta(t) \theta'(t) - r(t) \sin \theta(t) (\theta'(t))^2 + r(t) \cos \theta(t) \theta''(t)] \vec{j} \end{aligned}$$

relation qui peut s'écrire à l'aide de vecteur radial unitaire :  $\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$  et le vecteur normal unitaire :  $\vec{n} = \frac{d\vec{u}}{d\theta} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$  sous la forme :

$$\vec{\gamma}(t) = [r''(t) - r(t)(\theta'(t))^2] \vec{u} + [2r'(t)\theta'(t) + r(t)\theta''(t)] \vec{n}.$$

Comme la seule force en présence est radiale, alors, d'après la loi fondamentale de la mécanique :

$$\begin{cases} r''(t) - r(t)(\theta'(t))^2 = \frac{-K}{r^2} & (2) \\ 2r'(t)\theta'(t) + r(t)\theta''(t) = 0 & (3) \end{cases}$$

La relation (2) s'écrit en multipliant par  $r$  :  $2r(t)r'(t)\theta'(t) + r^2(t)\theta''(t) = 0$  ou encore  $\frac{d}{dt} \left[ r^2 \frac{d\theta}{dt} \right] = 0$ . On en déduit que

$r^2 \frac{d\theta}{dt} = k$  où  $k$  est une constante ( la deuxième loi de KEPLER, 1609 )

La relation (2) devient donc

$$(4) \quad \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{k^2}{r^3} = -\frac{K}{r^2}.$$

Effectuons le changement de variable  $u = \frac{1}{r}$ . Comme  $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt}$  et  $\frac{du}{dt} = \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$ , et donc

$$-\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{du}{d\theta} \frac{k}{r^2}$$

ou encore

$$\frac{dr}{dt} = -k \frac{du}{d\theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[ -k \frac{du}{d\theta} \right] = \frac{d}{d\theta} \left[ -k \frac{du}{d\theta} \right] \frac{d\theta}{dt} \\ &= -k \frac{d^2 u}{d\theta^2} \frac{k}{r^2} = -\frac{k^2}{r^2} = -\frac{k^2}{r^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2}. \end{aligned}$$

En remplaçant cette expression dans l'équation (4), nous obtenons l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec second membre :

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{K}{k^2}.$$

La solution général de telle équation s'écrit :

$$u(\theta) = A \sin \theta + B \cos \theta + \frac{K}{k^2}$$

Si nous plaçons l'axe des coordonnées polaires de telle sorte que  $r(\theta)$  soit minimal lorsque  $\theta = 0$ ,  $u(\theta)$  devrait être maximal, ce qui donne  $A = 0$  et, puis que  $u''(\theta) = -B < 0$ , donc  $B > 0$ . Ainsi

$$u(\theta) = B \cos \theta + \frac{k}{k^2}$$

et  $r(\theta) = \frac{1}{B \cos \theta + \frac{K}{k^2}} = \frac{r_0}{1 + e \cos \theta}$  ( $r_0 = \frac{k^2}{K}$ ,  $e = B \frac{k^2}{K}$ ). Cela représente l'équation d'une conique en coordonnées polaires, d'excentricité  $e$  dont l'un des foyers est l'origine.  $\square$

**Corollaire 5.1** ( Première loi de KEPLER, 1609 ) **Dans le référentiel héliocentrique ( le centre est le Soleil ), les centres d'inertie des planètes décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers.**

**Démonstration :** En effet, d'après le théorème précédent, les trajectoires sont des coniques et comme les planètes ne peuvent pas s'éloigner indéfiniment du centre de Soleil, donc il y a une forte "probabilité" pour que les trajectoires des planètes qui gravitent autour de notre Soleil soient des ellipses, c'est pourquoi on existe encore. Autrement dit :  $0 < e < 1$ .  $\square$

**Exemples :**

Terre  $e = 0,017$ . Mercure  $e = 0,206$ . Neptune  $e = 0,009$ .

## 6 Ensemble de points $M(x, y)$ tels que $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

Soit  $(\Gamma)$  l'ensemble de points  $M(x, y)$  du plan tels que  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$  avec  $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ .

**Théorème 6.1** **Il existe un repère orthonormé dans lequel  $(\Gamma)$  possède une équation de la forme  $A'x^2 + C'y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0$**

**Démonstration :** Posons  $\begin{cases} x = X \cos \theta - Y \sin \theta \\ y = X \sin \theta + Y \cos \theta \end{cases}$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ , le coefficient du terme  $XY$  de l'équation obtenue est :

$$2(C - A) \cos \theta \sin \theta + 2B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = (C - A) \sin 2\theta + 2B \cos 2\theta.$$

Si  $A = C$ , il suffit de prendre  $\theta = \frac{\pi}{4}$  et sinon  $\theta = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2B}{A - C} \right)$ .  $\square$

Prenons un repère orthonormé dans lequel une équation de  $(\Gamma)$  est :  $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ .

1. Si  $AC \neq 0$ , en prenant pour nouvelle origine le point  $\Omega(\frac{-D}{A}, \frac{-E}{C})$ , on obtient l'équation :

$$Ax^2 + Cy^2 + F_1 = 0.$$

Si  $AC > 0$ , alors :

- (a) soit  $A_1 F_1 > 0$  et  $(\Gamma)$  est vide,
- (b) soit  $F_1 = 0$  et  $(\Gamma)$  est réduite au centre  $\Omega$  du repère,
- (c) soit  $A F_1 < 0$  et  $(\Gamma)$  est une ellipse d'équation réduite :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si  $AC < 0$ , alors :

- (a) soit  $F_1 = 0$  et  $(\Gamma)$  est la réunion de deux droites sécantes en  $\Omega$ ,
- (b) soit  $F_1 \neq 0$  et  $(\Gamma)$  est une hyperbole d'équation réduite :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \pm 1.$$

2. Si  $A = 0$  et  $C \neq 0$  en prenant pour nouvelle origine le point  $\Omega$  de coordonnées  $(0, \frac{-E}{C})$ , on obtient l'équation :

$$Cy^2 + 2Dx + F_1 = 0.$$

- (a) Si  $D \neq 0$ , par un nouveau changement d'origine, on obtient l'équation réduite d'une parabole :

$$y^2 = 2px.$$

- (b) Si  $D = 0$ , alors :

- i. soit  $F_1C > 0$  et  $(\Gamma)$  est vide
- ii. soit  $F_1C \leq 0$  et  $(\Gamma)$  est la réunion de deux droites parallèles, éventuellement confondues.

3. Les cas  $A \neq 0$  et  $C = 0$  se déduisent du précédent par une symétrie par rapport à la première bissectrice.

□

**Remarque :** Soit  $\Gamma$  une conique définie par l'équation  $f(x, y) = 0$  avec  $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$ . On a, pour tout  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  :

$$f(x_0 + x, y_0 + y) = f(x_0, y_0) + x \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

$\Omega(x_0, y_0)$  est centre de symétrie de  $(\Gamma)$  si, et seulement si, l'équation (\*) est invariant en changeant  $x$  et  $y$  par  $-x$  et  $-y$ . On trouve donc les coordonnées de  $\Omega$  en résolvant le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

**Exemples :** 1. La nature de la courbe  $(\Gamma)$  d'équation cartésienne :

$$x^2 - 2xy + y^2 + x + y + 1 = 0.$$

On a  $A = C = 1$ , on tourne donc le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'un angle  $\frac{\pi}{4}$  autour de  $O$ . Pour cela on pose :

$$\begin{cases} x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} M(x, y) \in (\Gamma) &\iff (x - y)^2 + (x + y) + 1 = 0 \\ &\iff 2y'^2 + \sqrt{2}x' + 1 = 0 \\ &\iff y'^2 = \frac{-1}{\sqrt{2}} \left( x' + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

$(\Gamma)$  est donc une parabole de paramètre  $p = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ . Le sommet de  $(\Gamma)$  est  $S\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ , son axe focal  $(D)$  est la droite d'équation  $y' = 0$ . Dans le repère initial, le sommet a pour coordonnées  $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$  et l'axe focal a pour équation  $y = x$ .

2. La nature de la courbe  $(\Gamma)$  d'équation cartésienne :

$$7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 + 4x - 4\sqrt{3}y = 0.$$

Effectuons une rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$  tel que  $\tan(2\theta) = \sqrt{3}$ . En prenant, par exemple,  $\theta = \frac{\pi}{6}$ . Posons donc :

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}x' - y'}{2} \\ y = \frac{x' + \sqrt{3}y'}{2} \end{cases}.$$

L'équation de  $(\Gamma)$  dans le repère  $(O, \vec{i}', \vec{j}')$  est :  $2x'^2 + (y' - 1)^2 = 1$ , donc  $(\Gamma)$  est une ellipse, les longueurs des demi-axes sont donc  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $b = 1$ . Le centre de l'ellipse dans le repère initial est  $\Omega\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

3. La nature de la courbe  $(\Gamma)$  d'équation cartésienne :

$$xy = 1.$$

On tourne de  $\frac{\pi}{4}$  ( $A = B$ ). Pour cela, on pose

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\left(\frac{x' - y'}{2}\right) \\ y = \sqrt{2}\left(\frac{x' + y'}{2}\right) \end{cases}.$$

On a alors

$$xy = 1 \iff \frac{1}{2}(x' - y')(x' + y') = 1 \iff \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$$

Ainsi, si  $R$  est le repère orthonormé initial  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et  $R'$  est le repère  $(O, \vec{I}, \vec{J})$  où  $\vec{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$  et  $\vec{J} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j})$ , une équation de  $(\Gamma)$  dans  $R$  est  $xy = 1$  et une équation de  $(\Gamma)$  dans  $R'$  est  $\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$ . On obtient donc une hyperbole de centre  $O(0, 0)$  avec ses éléments caractéristiques  $a = b = \sqrt{2}$ ,  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$  et  $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$ .

L'axe focal est l'axe  $(Ox')$  ou encore la droite d'équation  $y = x$  dans  $R$ . Les sommets sont  $A(\sqrt{2}, 0)$ ,  $A'(-\sqrt{2}, 0)$  dans le repère  $R'$  et donc sont  $A(1, 1)$  et  $A'(-1, -1)$  dans le repère initial. Les foyers sont  $F(2, 0)$  et  $F'(-2, 0)$  dans  $R'$  et donc sont  $F(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  et  $F'(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ . Les directrices sont les droites d'équations  $x' = 1$  et  $x' = -1$  et donc dans  $R'$ , les droites d'équations  $x + y = \sqrt{2}$  et  $x + y = -\sqrt{2}$ .

.....