Chapitre 3
NOMBRES RÉELS ET SUITES

Mohamed TARQI

Table des matières

1 Corps $\mathbb{R}$ des nombres réels **1**
- 1.1 Définition 1
- 1.2 Valeur absolue d'un nombre réel 2
- 1.3 Caractérisation de la borne supérieure 2
- 1.4 Propriété d'Archimède 5

2 Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$ **5**

3 Suites de nombres réels ou complexes **6**
- 3.1 Convergence et divergence d'une suite 7
- 3.2 Propriétés des suites réelles convergentes 7
- 3.3 Exemples de suites 9
  - 3.3.1 Suites arithmétiques 9
  - 3.3.2 Suites géométriques 9
  - 3.3.3 Suites arithmético-géométrique 10

4 Suites réelles monotones **10**
- 4.1 Définitions et propriétés 10
- 4.2 Suites adjacentes 11

5 Sous-suite d'une suite. Théorème de Bolzano-Weierstrass **13**

1 Corps $\mathbb{R}$ des nombres réels

Dans cette partie on suppose connu l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ et ses propriétés. On rajoutant un axiome A_4 aux propriétés que possède déjà $\mathbb{Q}$, on construit un nouvel ensemble infiniment plus "gros" et plus "riche" que $\mathbb{Q}$.

1.1 Définition

On appelle ensemble des nombres réels, on le note $\mathbb{R}$, tout ensemble vérifiant les axiomes suivantes :

A_1. $\mathbb{R}$ est muni de deux lois de composition interne (+) et (.) qui en font un **corps commutatif.**

A_2. $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre notée $\leq$ qui en fait un ensemble **totalement ordonné.**

A_3. La relation d'ordre est **compatible** avec les opérations (+) et (.). c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \forall x, x', y, y' \in \mathbb{R} \ \ (x \leq y \ \text{ et } \ x' \leq y') \Longrightarrow x + x' \leq y + y'. \\ \forall x, y \in \mathbb{R} \ \ (0 \leq x \ \text{ et } \ 0 \leq y) \Longrightarrow 0 \leq xy. \end{cases}$$

A_4. Toute partie non vide **majorée** de $\mathbb{R}$ admet une **borne supérieure.**

Remarques :

1. L'ensemble $\mathbb{R}$ défini ci-dessus est unique à un isomorphisme près. Cela signifie que si $\mathbb{R}_1$ et $\mathbb{R}_2$ sont deux ensembles vérifiant les axiomes A_1, A_2, A_3 et A_4, alors il existe un isomorphisme f de $\mathbb{R}_1$ sur $\mathbb{R}_2$ compatible avec les structures de corps et d'ensembles ordonnées $\mathbb{R}_1$ et $\mathbb{R}_2$, cela signifie que :
   - f est bijective de $\mathbb{R}_1$ sur $\mathbb{R}_2$;
   - $\forall\ x,y\in\mathbb{R}_1$, $f(x+y)=f(x)+f(y)$ et $f(xy)=f(x)f(y)$;
   - $\forall\ x,y\in\mathbb{R}_1$, $x\leq y\Longrightarrow f(x)\leq f(y)$.
2. On peut plonger $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. c'est-à-dire qu'on peut identifier les éléments de $\mathbb{Q}$ avec les éléments de $\mathbb{R}$. On procède de la façon suivante :
   On note 0 l'élément neutre de la loi addition (+) et 1 celui de la loi multiplicative (.). On construit alors les ensembles :
   - $\mathbb{N}=\{0,1,2=1+1,3=2+1,\ldots,n=(n-1)+1,\ldots\}$
   - (-$\mathbb{N}$) $=\{0,1,2,\ldots,n,\ldots\}$
   - $\mathbb{Z}$=$\mathbb{N}\cup$(-$\mathbb{N}$)
   - $\mathbb{Q}=\left\{\dfrac{p}{q}/p\in\mathbb{Z}\ \text{ et }\ q\in\mathbb{Z}^*\right\}$
3. D'après l'axiome A_4, on déduit que toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure (qui appartient à $\mathbb{R}$). Pour la démonstration il suffit de vérifier que $\inf A=-\sup(-A)$.

1.2 Valeur absolue d'un nombre réel

Définition 1.1. *Si $x\in\mathbb{R}$, on appelle valeur absolue, que l'on note $|x|$, le plus grand des nombres x et $-x$, soit*

$$|x|=\max\{x,-x\}=\begin{cases} x & \text{si}\quad x\geq 0\\ -x & \text{si}\quad x\leq 0\end{cases}$$

On a les propriétés suivantes : pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a :

1. $|x|=0\Longleftrightarrow x=0$
2. $|-x|=|x|$
3. $|x+y|\leq|x|+|y|$
4. $||x|-|y||\leq|x-y|$
5. $|xy|=|x||y|$

1.3 Caractérisation de la borne supérieure

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- Un élément $M\in\mathbb{R}$ est un majorant de A si pour tout $x\in A$, on a $x\leq M$ $(x\in A\Longrightarrow x\leq\Longrightarrow M)$.
- Un élément $m\in\mathbb{R}$ est un minorant de A si pour tout $x\in A$, on a $m\leq x$ $(x\in A\Longrightarrow m\leq\Longrightarrow x)$.

On dit alors que A est une partie majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$. Une partie à la fois majorée et minorée est appelée une partie bornée de $\mathbb{R}$.

Théorème et définition 1.1. **S'il existe dans A, partie de $\mathbb{R}$, un élément supérieure à tous les autres il est unique, on l'appelle le plus grand élément de A.**
De même, s'il existe dans A un élément inférieure à tous les autres il est unique, on l'appelle le plus petit élément de A.
Ces deux éléments, on les notes respectivement :

$$\max(A)\qquad\textbf{et}\qquad\min(A).$$

Démonstration : Supposons qu'il existe dans A, un élément M tel que :

$$\forall x \in A, \quad x \leq M$$

cette élément est unique, en effet, soit M' un autre élément tel que :

$$\forall x \in A, \quad x \leq M'$$

on a, à la fois

$$M \leq M' \text{ et } M' \leq M$$

donc

$$M = M'$$

De même pour le plus petit élément. □

Définition 1.2. *On appelle borne supérieure d'une partie majorée A de $\mathbb{R}$, le plus petit des majorants (s'il existe) et borne inférieure de A d'une partie minorée A de $\mathbb{R}$ le plus grand des minorants (s'il existe).*
Ces bornes, s'elles existent, on les notes :

$$\inf(A) \quad et \quad \sup(A)$$

Si A n'a pas de borne supérieure (resp. inférieure), on note $\sup(A) = +\infty$ *(resp.* $\inf(A) = -\infty$ *)*

Exemple : Si $A = [0,1[$, alors 0 est le plus petit élément (et donc la borne inférieure) et 1 est la borne supérieure de A, mais cette borne supérieure n'est pas atteint dans $A = [0,1[$, il n'y a donc pas de plus grand élément. Si $A = [0,+\infty[$, cette partie n'a ni plus grand élément ni borne supérieure.

THÉORÈME 1.1. **Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Un élément M de $\mathbb{R}$ est borne supérieure de A si et seulement si M vérifie les deux conditions :**

(i) $\forall x \in A, \quad x \leq M$;

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A$ **tel que** $M - \varepsilon < x \leq M$.

Démonstration : Supposons $M = \sup A$. Alors (i) est vrai. Par ailleurs si (ii) était faux, on aurait :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A, \text{non}(M - \varepsilon < x \leq M)$$

Comme on a : $\forall x \in A, x \leq M$, on a donc : $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A, M - \varepsilon \geq x$ Mais alors $M - \varepsilon$ est un majorant de A et l'on a $M - \varepsilon$ qui majore $\sup A$, puisque celui-ci est le plus petit d'entre eux. C'est une contradiction , qui prouve la partie *seulement si* du théorème.
Prouvons la partie *si*. Soit M un élément de $\mathbb{R}$ vérifiant (i) et (ii). Alors M est un majorant de A. Montrons que c'est le plus petit. Soit M' un majorant de A avec $M' \leq M$. Si $M' < M$, on note $\varepsilon = M - M' > 0$. D'après (ii) on a :

$$\exists x \in A, \quad M - \varepsilon < x \leq M.$$

Or $M - \varepsilon = M - (M - M') = M'$ et l'on a donc dans la ligne ci dessus $x > M'$, ce qui prouve que M' n'est pas un majorant de A. Cette contradiction montre que $M' = M$ comme désiré. Donc M est le plus petit des majorants de A, c'est-à-dire $M = \sup A$. □

Remarque : La première propriété traduit le fait que M majore A, la seconde qu'un réel strictement inférieure à M n'est pas un majorant de A.
De même on a une caractérisation de la borne inférieure d'une partie.

$$m = \inf(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, \quad x \geq m; \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A \text{ tel que } a < m + \varepsilon. \end{cases}$$

Exercice 1. Soit l'ensemble $A = \left\{ \dfrac{n+1}{n+2} / n \in \mathbb{N} \right\}$. Déterminer $\inf A$ et $\sup A$.

A est une partie bornée de $\mathbb{R}$, en effet $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$n+1 < n+2 \leq 2(n+1).$$

D'où

$$\frac{1}{2} \leq \frac{n+1}{n+2} < 1.$$

Donc

$$\frac{1}{2} \leq \inf A \leq \sup A \leq 1$$

Comme $\frac{1}{2} \in A$, on a donc $\inf A = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ est le plus petit élément de A.
Montrons que $1 = \sup A$. Si 1 ne l'était pas, il existerait $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{n+1}{n+2} \leq \alpha < 1.$$

Soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ 1 - \frac{1}{n+2} \leq \alpha < 1$$

Donc $n \leq \dfrac{1}{\alpha - 1} - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ceci est absurde car $\mathbb{N}$ est non borné. Par suite $\sup A = 1$

Lemme 1.1. **Il n'existe aucun nombre rationnel x tel que $x^2 = 2$.**

Démonstration : Supposons qu'il existe $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tel que $a^2 = 2b^2$ avec a et b sont premiers entre eux. Cela impliquerait que 2 divise a^2 et par conséquent a aussi (puisque 2 est premier). On peut donc écrire $a = 2a'$ et on aurait ainsi $4a'^2 = 2b^2$, soit $b^2 = 2a'^2$. On refait le même raisonnement pour b, pour aboutir au fait que 2 divise b. Ce qui contredit le fait que a et b sont premiers entre eux. $\square$

Proposition 1.1. **L'ensemble $C = \{x \in \mathbb{Q} / x^2 < 2\}$ est non vide majoré de $\mathbb{R}$, et sa borne supérieure n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.**

Démonstration : Le fait que C soit majoré est clair (par exemple 2 est un majorant de C). De plus C est non vide car $0 \in C$. Raisonnons par l'absurde et supposons q'il existe $c \in \mathbb{Q}$ tel que $c = \sup C$. On doit avoir nécessairement $c^2 \leq 2$. Mais d'après le lemme $c^2 \neq 2$, donc $c^2 < 2$. Montrons qu'on peut trouver un rationnel $y > 0$ tel que $c + y \in C$, ce qui contredit le fait que $c = \sup C$. En effet pour tout $y \in Q$ tel que $0 < y < 1$ on a :

$$(c+y)^2 = c^2 + 2cy + y^2 < c^2 + (2c+1)y.$$

Si on choisit $y \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < y < 1$ et $y < \dfrac{2-c^2}{2c+1}$ (un tel y existe, par exemple $y = \min\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2-c^2}{2(2c+1)}\right)$), on vérifie facilement que $(c+y)^2 < 2$. $\square$

Exercice 2.
1. Soient A et B deux parties non vide et bornées dans $\mathbb{R}$. Montrer que :
   (a) $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$;
   (b) $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$;
   (c) Si $A \subset B$, alors $\inf(B) \leq \inf(A)$ et $\sup(A) \leq \sup(B)$.
2. On pose $A + B = \{a + b / a \in A \ \text{ et } \ b \in B\}$. Montrer que : $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.
3. Déterminer, si elle existe, la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble suivant :

$$A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

CORRIGÉ :

1. (a) Supposons que $\sup(A) \leq \sup(B)$. Si $x \in A \cup B$, on a soit $x \in A$ et $x \leq \sup(A) \leq \sup(B)$, soit $x \in B$ et $x \leq \sup(B)$, il en résulte que $\sup(A \cup B) \sup(B)$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver $x \in B \subset A \cup B$ tel que $\sup(B) - \varepsilon < x \leq \sup(B)$. On a donc $\sup(A \cup B) = \sup(B)$.
   (b) On montre de manière analogue que $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$.
   (c) Supposons que $A \subset B$. Pour tout $x \in A$, on a $x \in B$ et $\inf(B) \leq x \leq \sup(B)$, ce qui entraîne, par définition des bornes supérieure et inférieure, $\inf(B) \leq \inf(A)$ et $\sup(A) \leq \sup(B)$.
2. Notons $M = \sup(A)$ et $M' = \sup(B)$. Pour tout $z = x + y$ avec $x \in A$ et $y \in B$, on a : $z = x + y \leq M + M'$. L'ensemble $A + B$ est donc non vide et majoré et en conséquence admet une borne supérieure M'' avec $M'' \leq M + M'$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver $x \in A$ et $y \in B$ tel que $M - \frac{\varepsilon}{2} < x \leq M$ et $M' - \frac{\varepsilon}{2} < y \leq M'$, ce qui nous donne $z = x + y \in A + B$ tel que
$$M + M' - \varepsilon < z \leq M + M'.$$
   le réel $M + M'$ est donc la borne supérieure de $A + B$.
3. En séparant les entiers pairs et les entiers impairs, on a : $A = A_1 \cup A_2$ avec :
$$A_1 = \left\{1 + \frac{1}{2p} / p \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad \left\{-1 + \frac{1}{2p+1} / p \in \mathbb{N}\right\}.$$
   On vérifie facilement que $\inf(A_1) = 1 \notin A_1$, $\sup(A_2) = \frac{3}{2} \in A_1$, $\inf(A_2) = -1 \notin A_2$, $\sup(A_2) = 0 \in A_2$, soit :
$$\sup(A) = \max(\sup(A_1), \sup(A_2)) = \frac{3}{2} \in A,$$
$$\inf(A) = \min(\inf(A_1), \inf(A_2)) = -1 \notin A.$$

1.4 Propriété d'Archimède

THÉORÈME 1.2. **$\mathbb{R}$ est archimédien. c'est-à-dire**

$$\forall x > 0, \quad \forall y > 0\ \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } nx > y$$

Démonstration : Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $nx \leq y$. Posons $E = \{nx / n \in \mathbb{N}\}$, E est alors une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, donc admet une borne supérieure M dans $\mathbb{R}$ (Axiome A_4). Comme $M - x < M$, $M - x$ n'est pas un majorant de E ; donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $nx > M - x$, d'où $(n+1)x > M$, ce qui contredit la définition de M. Notre hypothèse est fausse. □

Corollaire 1.1. **(et définition) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ unique tel que $p \leq x < p + 1$; p est appelé partie entière de x, et noté $E(x)$, ou $[x]$.**

Démonstration : Soit $E = \{n \in \mathbb{Z} / n \leq x\}$, E est une partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$, donc admet un plus grand élément p, donc $p \in E$ et $p + 1 \notin E$, d'où :
$$p \leq x < p + 1.$$
□

2 Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$

On adjoint à $\mathbb{R}$ deux éléments distincts et qui n'appartient pas à $\mathbb{R}$, notés $-\infty$ et $+\infty$, et on prolonge à $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ les lois internes (+) et (.) et la relation d'ordre $\leq$ par :

- $\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty \\ x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty \end{cases}$
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ et $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- $\forall x > 0$, $x(+\infty) = (+\infty)x = +\infty$ et $x(-\infty) = (-\infty)x = -\infty$

- $\forall x < 0$, $x(+\infty) = (+\infty)x = -\infty$ et $x(-\infty) = (-\infty)x = +\infty$
- $(+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$ et $(+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$

$\overline{\mathbb{R}}$ s'appelle la droite numérique achevée. $\mathbb{R}$m Les lois (+) et (.) dans $\overline{\mathbb{R}}$ ne sont pas partout définies ; $(+\infty)+(-\infty)$, $(-\infty)+(+\infty)$, $0(+\infty)$, $(+\infty)0$, $0(-\infty)$, $(-\infty)0$ ne sont pas définies.

Définition 2.1. *Il y a dans $\overline{\mathbb{R}}$, exactement quatre type d'intervalles :* $[a,b],[a,b[,]a,b],]a,b[$ *pour tout* $(a,b)\in\overline{\mathbb{R}}^2$ *tel que* $a \le b$.

Proposition 2.1. **I est un intervalle si, et seulement si, $\forall x \in I$, $\forall y \in I$, $x < z < y \Longrightarrow z \in I$.**

Une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant cette propriété est dite **convexe**.

THÉORÈME 2.1. **Soit $]a,b[$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Alors $]a,b[$ rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.**

Démonstration : Nous devons montrer que $]a,b[$ contient un rationnel et irrationnel. Soient x et y deux éléments de $]a,b[$. Si l'un d'eux est rationnel et l'autre est irrationnel, il n'y a rien à montrer.
S'ils sont deux rationnels, il suffit de montrer que :

1. Entre deux rationnels, il existe un irrationnel. S'ils sont tous deux irrationnels, il suffit de montrer que :
2. Entre deux rationnels , il existe un rationnel.

1. Si x et y sont deux rationnels tels que $x < y$, alors $z = x + \dfrac{(y-x)}{2}\sqrt{2}$ est un irrationnel compris entre x et y.
2. Soit x et y deux irrationnels tels que $x < y$. Posons
$$p = E\left(\frac{1}{y-x}\right) + 1$$
Considérons maintenant $q = E(px)$. On a :
$$q \le px < q+1 \le px+1 < px + p(y-x) = py$$
donc
$$x < \frac{q+1}{p} < y$$
$\dfrac{q+1}{p}$ est un rationnel compris entre x et y.

□

Définition 2.2. *Si A est une partie de $\mathbb{R}$ telle que tout intervalle $]a,b[$ non vide rencontre A, on dit que A est **dense** dans $\mathbb{R}$. Ainsi $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, de même que $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.*

3 Suites de nombres réels ou complexes

$\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels ou complexes. Une suite numérique à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$; au lieu de la noter

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array},$$

on la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\ge 0}$. On note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.
Pour chaque n de $\mathbb{N}$, u_n est appelé le $n^{ième}$ terme de la suite.

3.1 Convergence et divergence d'une suite

Définition 3.1. 1. *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $l \in \mathbb{K}$ si et seulement si :*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$$

et on écrit :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} u_n = l$$

2. *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est divergente si et seulement si elle ne converge pas.*

Remarque : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a les équivalences suivantes :

$$|u_n - l| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow u_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\Longleftrightarrow l-\varepsilon < u_n < l+\varepsilon$$

Cela signifie que u_n est aussi proche de l que l'on veut pour n suffisamment grand.

Exemples :

1. Toute suite stationnaire (constante à partir d'un certain rang) est convergente.
2. La suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ converge vers 0. En effet, soit $\varepsilon > 0$, cherchons à avoir $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$.
   si $n_0 = E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$, alors $n \geq n_0 \Longrightarrow \frac{1}{n} \leq \varepsilon$.
   Autrement :
   $\mathbb{R}$ est archimédien, donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \frac{1}{\varepsilon}$, alors : $\forall n > N$, $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$

Définition 3.2. *1. Une suite de nombres réelles est dite majorée (resp.minorée) si et seulement si il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < A(resp. u_n > A).$$

2. Une suite numérique est dite bornée si et seulement si il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| < M.$$

Exemples : • $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + (-1)^n$, $0 \leq u_n \leq 2$.
• $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1+n}{2+n} + i$, $|v_n| \leq \sqrt{2}$.

Définition 3.3. *(**limite infinie**) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique réelle.*
1. On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$ si et seulement si :

$$(\forall A > 0) \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \ (n > n_0 \Longrightarrow u_n > A)$$

et on écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

2. On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers $-\infty$ si et seulement si $(-u_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$
et on écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

3.2 Propriétés des suites réelles convergentes

Proposition 3.1. *(borne supérieure et suites)* **Si A admet une borne supérieure (resp. inférieure), il existe alors une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A qui converge vers $M = \sup A$. (resp. $m = \inf A$).**

Démonstration : Supposons que A admette une borne supérieure M. Pour tout entier naturel n, on peut trouver un élément $x_n \in A$ tel que

$$M - \frac{1}{n+1} < x_n \leq M.$$

De cet encadrement on déduit alors que $M = \lim_{n\to\infty} x_n$. □

Remarque : Si $\sup A = +\infty$, on peut trouver un entier $n \geq 1$ et un élément $x_n \in A$ tel que $x_n > n$. La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ diverge vers $= +\infty$.

THÉORÈME 3.1. **Toute suite numérique convergente est bornée.**

Démonstration : Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$. Pour $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \in N$, tel que $n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - l| \leq 1$, on a donc pour tout $n \geq n_0 : |u_n| \leq 1 + |l|$.
Soit

$$M = \max\{|u_0|, |u_1|, ..., |u_{n-1}|, 1 + |l|\},$$

on conclut que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M.$$

□

Remarque : La réciproque du théorème n'est vraie en général, il existe des suites bornées non convergentes, par exemple : $u_n = (-1)^n$.

Proposition 3.2. **(Théorème d'encadrement) Soient $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$, $(w_n)_{n\geq 0}$ trois suites réelles telles que :**

1. $\exists n_0 \in N : \forall n \in N,\ n \geq n_0 \Longrightarrow v_n \leq u_n \leq w_n;$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l.$

Alors $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$, il existe n_1 et n_2 de $\mathbb{N}$ tels que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), n \geq n_1 \Longrightarrow |v_n - l| \leq \varepsilon \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}), n \geq n_2 \Longrightarrow |w_n - l| \leq \varepsilon.$$

En notant $n' = \max(n_1, n_0, n_2)$, on a donc pour tout $n \geq n'$

$$-\varepsilon < v_n - l < u_n - l < w_n - l < \varepsilon$$

donc $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l. □

Exemple : On montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \dfrac{1}{n}$.
On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} [\ln(n+1) - \ln(n)] = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0.$$

Proposition 3.3. **Soient $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles telles que :**

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geq n_0 \Longrightarrow v_n \leq u_n \ \ et \ \ \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Démonstration : Soit $A > 0$.

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \Longleftrightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} : \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n > n_1 \Longrightarrow v_n > A)$$

Soit $n_2 = \max\{n_1, n_2\}$, alors

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (n > n_2 \Longrightarrow u_n > v_n > A)$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

□

Exemple : Soit $a > 1$, on a $a^n \geq 1 + n(a-1)$, en effet :

$$\begin{aligned} a^n &= (1+a-1)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (a-1)^n \\ &= 1 + n(a-1) + \sum_{k=2}^{n} C_n^k (a-1)^n \\ &\geq 1 + n(a-1) \end{aligned}$$

comme $\lim_{n \to +\infty} [1 + n(a-1)] = +\infty$ alors $\lim_{n \to +\infty} a^n = +\infty$.

Proposition 3.4. **Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de limite 0. Alors la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et de limite nulle.**

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n| \leq \varepsilon$ et il existe un réel positif M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \geq M$, et donc pour $n \geq n_0$, on a $|u_n v_n| \leq \varepsilon$. Donc la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. □

3.3 Exemples de suites

3.3.1 Suites arithmétiques

Définition 3.4. *Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{K}$ est dite **arithmétique** si et seulement si, il existe r de $\mathbb{K}$ tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$$

r est appelé la raison de suite arithmétique $(u_n)_{n\geq 0}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr$$

La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique $(u_n)_{n\geq 0}$ de raison r est :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = n\frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$$

3.3.2 Suites géométriques

Définition 3.5. *Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{K}$ est dite **géométrique** si et seulement si, il existe q de $\mathbb{K}$ tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q u_n$$

q est appelé la raison de suite géométique $(u_n)_{n\geq 0}$.
On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 q^n$$

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique $(u_n)_{n\geq 0}$ de raison $q \neq 1$ est :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \frac{1-q^n}{1-q}$$

THÉORÈME 3.2. **Soit $q \in \mathbb{R}$, la suite $(q^n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si $|q| < 1$ ou $q = 1$, de plus :**

- $|q| < 1 \Longrightarrow \lim_{n \longrightarrow +\infty} q^n = 0.$
- $q \in]1, +\infty[\Longrightarrow \lim_{n \longrightarrow +\infty} q^n = +\infty.$

Démonstration : • Si $q \in]1,+\infty[$, alors $q^n \geq 1+n(q-1) \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} q^n = +\infty$.
• Si $|q|<1$, alors $\frac{1}{|q|}>1 \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} (\frac{1}{|q|})^n = \frac{1}{\lim_{n\longrightarrow+\infty}|q^n|} = +\infty$
et par suite

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \left|q^n\right| = 0. \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} q^n = 0$$

□

On déduit facilement le résultat suivant.

Corollaire 3.1. **Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$. La suite géométrique $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans les deux cas suivantes :**

- $|z|<1$.
- $|z|=1$ **et** $\theta \equiv 0[2\pi]$.

3.3.3 Suites arithmético-géométrique

Définition 3.6. *Une suite $(u_n)_{n\geq0}$ dans $\mathbb{K}$ est dite **arithmético-géométrique** si et seulement si,il existe q et r de $\mathbb{K}$ tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = r + qu_n$$

• Si $r=0$ ou $q=1$ on trouve les suites précédentes.
• Soit l la solution de l'équation : $x = xq + r$, on pose $v_n = u_n - l$, alors $(v_n)_n$ est une suite géométrique.

Exemple : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation $u_{n+1} = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{u_n}{3}$ converge vers 0.

4 Suites réelles monotones

4.1 Définitions et propriétés

Définition 4.1. *Soit $(u_n)_{n\geq0}$ une suite de nombres réels.*
• *On dit que $(u_n)_{n\geq0}$ est une suite croissante (resp.décroissante) si et seulement si*

$$\forall n \geq 0, u_{n+1} \leq u_n (resp.u_n \geq u_{n+1})$$

• *On dit que $(u_n)_{n\geq0}$ est une suite strictement croissante (resp.strictement décroissante) si et seulement si*

$$\forall n \geq 0, u_{n+1} < u_n (resp.u_n > u_{n+1})$$

• *On dit que $(u_n)_{n\geq0}$ est une suite monotone (resp.strictement monotone) si et seulement si $(u_n)_{n\geq0}$ est une suite croissante ou décroissante (resp.strictement croissante ou décroissante)*

Exemple : $n \geq 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$. Donc $(u_n)_{n\geq1}$ est strictement croissante.

THÉORÈME 4.1.

1. **Toute suite de nombres réels croissante et majorée est convergente.**
2. **Toute suite de nombres réels décroissante et minorée est convergente.**

Démonstration :

1. Soit $(u_n)_{n\geq0}$ suite réelle croissante majorée et $\varepsilon > 0$. Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. Cela revient à dire que l'ensemble $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majorée par M, donc l'ensemble E admet une borne supérieure l dans $\mathbb{R}$, d'après la caractérisation de la borne supérieure il existe $u_p \in E$ vérifiant $l - \varepsilon < u_p \leq l$. Donc $\forall n \geq p$ on a $l - \varepsilon \leq u_p \leq u_n \leq l$, alors $0 \leq l - u_n \leq \varepsilon$ ce qui prouve que $(u_n)_{n\geq0}$ converge vers l.
2. Si $(u_n)_{n\geq0}$ est une suite réelle décroissante et minorée alors $(-u_n)_{n\geq0}$ est une suite réelle croissante et majorée, donc $(-u_n)_{n\geq0}$ converge et de même pour $(u_n)_{n\geq0}$.

□

Exemple : $n \geq 1$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. On a $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante et $u_n \leq n\frac{1}{n+1} < 1$, donc $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.

THÉORÈME **4.2.**

1. **Toute suite de nombres réels croissante et non majorée tend vers $+\infty$.**
2. **Toute suite de nombres réels décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.**

Démonstration : Soit $A > 0$, puisque $(u_n)_n$ est non majorée, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > A$. Or $(u_n)_n$ est croissante, donc

$$\forall n \geq n_0, \;\; u_n \geq u_{n_0} > A$$

c'est-à-dire $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$. □

4.2 Suites adjacentes

Définition 4.2. *Deux suites $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0}$ de nombres réelles ont dites adjacentes si et seulement si*

1. *$(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante ;*
2. *$(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante ;*
3. *$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(v_n - u_n) = 0$.*

THÉORÈME **4.3. Si deux suites réelles sont adjacentes, alors elles convergent et ont la même limite.**

Démonstration : Notons $w_n = v_n - u_n$.
• La suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est décroissante car :

$$\begin{array}{rcl} w_{n+1} - w_n & = & (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) \\ & = & (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \leq 0 \end{array}$$

puisque $(w_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et de limite 0, on déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n$
• Ainsi $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée par v_0 donc converge vers un réel l et $(v_n)_{n\geq 0}$ décroissante minorée par u_0 donc converge vers l'.
• Comme $\lim\limits_{n\rightarrow+\infty}(v_n - u_n) = 0$, alors $l - l' = 0$ □

Exemple : On considère les suites réelles $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ définies par :

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \;\text{ et }\; b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{avec } 0 < a_0 < b_0$$

• On a $a_n > 0$ et $b_n > 0$
d'où

$$\begin{array}{rcl} a_n \leq b_n & \Longleftrightarrow & a_n^2 \leq b_n^2 \\ & \Longleftrightarrow & a_{n-1}b_{n-1} \leq \left(\dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}\right)^2 \\ & \Longleftrightarrow & a_{n-1}b_{n-1} \leq \dfrac{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 + 2a_{n-1}b_{n-1}}{4} \\ & \Longleftrightarrow & 4a_{n-1}b_{n-1} \leq a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 + 2a_{n-1}b_{n-1} \\ & \Longleftrightarrow & a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 - 2a_{n-1}b_{n-1} \geq 0 \\ & \Longleftrightarrow & (a_{n-1} - b_{n-1})^2 \geq 0 \end{array}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$
• $(a_n)_{n\geq 0}$ est croissante et $(b_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, en effet :

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{a_n^2} = a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \tfrac{a_n+b_n}{2} \leq \tfrac{2b_n}{2} = b_n$$

• d'autre part $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{b_n - a_n}{2}$, en effet :

$$\begin{aligned} b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{b_n - a_n}{2} &\iff \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} \leq \frac{b_n - a_n}{2} \\ &\iff a_n \leq \sqrt{a_n b_n} \\ &\iff a_n \leq b_n \end{aligned}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n \leq \frac{b_0 - a_0}{2^n}$
d'où $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$, donc les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes, et par conséquent elles convergent vers la même limite.

Application : Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n}.
Soit a un nombre réel donné et $n \in \mathbb{N}$, alors il existe un entier a_n et un seul tel que

$$a_n \leq 10^{-n} a < a_n + 1$$

ou encore

$$\frac{a_n}{10^n} \leq a < \frac{a_n + 1}{10^n}$$

Montrons que la suite $u_n = \frac{a_n}{10^n}$, $n \in \mathbb{N}$ des valeurs approchées décimales par défaut et la suite $\frac{a_n+1}{10^n}$, $n \in \mathbb{N}$ des valeurs approchées par excès du nombre a sont adjacentes.
On déduit des inégalités

$$\tfrac{a_n}{10^n} \leq a < \tfrac{a_n+1}{10^n} \text{ et } \tfrac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \leq a < \tfrac{a_{n+1}+1}{10^{n+1}}$$

$\frac{a_n}{10^n} < \frac{a_{n+1}+1}{10^{n+1}}$ qui s'écrit $10a_n < a_{n+1} + 1$ et puisque a_n et a_{n+1} sont des entiers,

$$10a_n \leq a_{n+1}$$

On en déduit $\frac{a_n}{10^n} \leq \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}$, c'est-à-dire $u_n \leq u_{n+1}$. La suite $(u_n)_n$ est ainsi croissante. De même on montre que $(v_n)_n$ est décroissante.
Enfin $v_n - u_n = \frac{1}{10^n}$ tend vers 0.
Don les deux suites sont adjacentes, elles sont convergentes et admettent une limite commune qui est a.

Exercice 3. Étude des suites de termes généraux : $u_n = \cos(n\alpha + \varphi)$ et $v_n = \sin(n\alpha + \varphi)$.

CORRIGÉ :

1. Supposons que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent et admettent des limites u et v.
   On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_{n-1} &= \cos(n\alpha + \varphi) + \cos(n\alpha - \varphi) = 2\cos(n\alpha + \varphi)\cos(\alpha) \\ v_{n+1} + v_{n-1} &= \sin(n\alpha + \varphi) + \sin(n\alpha - \varphi) = 2\sin(n\alpha + \varphi)\sin(\alpha) \end{aligned}$$

   Donc on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_{n-1} &= 2u_n\cos(\alpha) \qquad (1) \\ v_{n+1} + v_{n-1} &= 2v_n\sin(\alpha) \qquad (2) \\ u_n^2 + v_n^2 &= 1 \qquad (3) \end{aligned}$$

   Par passage à la limite, dans les relations précédentes, en déduit les relations

$$\begin{aligned} u(1 - \cos(\alpha)) &= 0 \qquad (4) \\ v(1 - \sin(\alpha)) &= 0 \qquad (5) \\ u^2 + v^2 &= 1 \qquad (6) \end{aligned}$$

   De (1.6) il résulte que u et v ne sont pas nuls tous les deux ; par suite $\cos\alpha = 0$ ou encore $\alpha = 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
   Inversement, si $\alpha = 2k\pi$ on a $u_n = \cos\varphi$, $v_n = \sin\varphi$. Les deux suites convergent.
   Conclusion : Les suites $(u_n)_n$ et $v_n)_n$ ne peuvent être toutes deux convergentes que si $\alpha = 2k\pi$.

2. Supposons que la suite $(u_n)_n$ converge vers u ; on fait aucune hypothèse sur la suite $(v_n)_n$.
   On a :
   $$v_n \sin\alpha = u_n \cos\alpha - u_{n+1} \tag{7}$$
   La suite $(v_n \sin\alpha)_n$ admet donc une limite $u(\cos\alpha - 1)$. Cela implique $\sin\alpha = 0$, sinon la suite($v_n)_n$ serait convergente vers $\frac{u(\cos\alpha-1)}{\sin\alpha}$ et d'après 1. α serait égal à $2k\pi$, ce qui est en contradiction avec $\sin\alpha \neq 0$.
   Donc $(u_n)_n$ ne peut converger que si $\sin\alpha = 0$, c'est-à-dire $\alpha = k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$.
   Inversement, si $\alpha = k\pi$, on a : $u_n = \cos(nk\pi + \varphi) = (-1)^{nk}\cos\varphi$.
   (a) Si k est pair, $u_n = \cos\varphi$ admet une limite $u = \cos\varphi$.
   (b) Si k est impair, $u_n = (-1)^n \cos\varphi$ n'admet une limite que si $\cos\varphi = 0$, c'est-à-dire $\varphi = \frac{\pi}{2} + l\pi$ avec $l \in \mathbb{Z}$, la limite dans ce cas est 0.
3. On remarque que $v_n = \cos(n\alpha + \varphi - \frac{\pi}{2})$, donc, d'après 2. $(v_n)_n$ ne peut converger que que si $\alpha = k\pi$.
   Inversement supposons $\alpha = k\pi$.
   (a) Si k est pair, $(v_n)_n)$ admet la limite $\sin\alpha$.
   (b) Si k est impair, $(v_n)_n)$ n'admet une limite que si $\sin\alpha = 0$, c'est-à-dire $\varphi = l\pi$; ł $\in \mathbb{Z}$ la limite est alors 0.

5 Sous-suite d'une suite. Théorème de Bolzano-Weierstrass

Définition 5.1. *On appelle sous-suite ou suite extraite de la suite $(u_n)_n$ une suite que noterons $(u_\varphi(n))_n$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.*

Exemples :

1. $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont deux suites extraites de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$
2. Si $u_n = (-1)^n$, $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$

Lemme 5.1. *Soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$, alors $\varphi(n) > n$.*

Démonstration : On a : $\varphi(0) \in \mathbb{N}$, donc $\varphi(0) \geq 0$, donc la propriété : $p(n)\ \ :\ \ \varphi(n) \geq n$ est vraie pour $n = 0$. Supposons qu'elle est vraie à l'ordre n. On a
$$\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n \Longrightarrow \varphi(n+1) > n \Longrightarrow \varphi(n+1) \geq n+1$$
donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$. □

Proposition 5.1. **Toute suite extraite d'une suite réelle convergente $(u_n)_n$ est une suite convergente et converge vers la même limite que celle de $(u_n)_n$.**

Démonstration : Soit $l = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$, alors
$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$
Soit $(u_\varphi(n))_n$ une suite extraite de $(u_n)_n$, où φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.
On a : $\varphi(n) \geq \varphi(n_0) \geq n_0$ pour tout $n \geq n_0$
D'où
$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \Longrightarrow |u_{\varphi(n)} - l| \leq \varepsilon$$
c'est-à-dire $l = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_{\varphi(n)}$.

Remarques : Ce résultat peut être exploité sous la forme suivante : S'il existe une sous suite extraite divergente d'une suite $(u_n)_n$, alors $(u_n)_n$ est divergente. Par exemple, $u_n = \cos(\frac{n\pi}{11})$, $n \in \mathbb{N}$, $u_{11n} = (-1)^n$ est divergente, donc $(u_n)_n$ diverge.
Il peut être aussi utilisé d'une autre façon : S'il existe deux suites d'une suite $(u_n)_n$ qui convergent vers deux limites différentes, alors $(u_n)_n$ diverge. Par exemple $u_n = (-1)^n$ est divergente car la suite $(u_{2n})_n$ converge vers 1 et $(u_{2n+1})_n$ converge vers -1.

Proposition 5.2. **Soit $(u_n)_n$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$. Pour que la suite $(u_n)_n$ converge vers l il faut et il suffit que les deux suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent toutes les deux vers l.**

Démonstration : Supposons que les deux suites extraites convergent vers l et montrons que $(u_n)_n$ converge vers l.
Soit $(\varepsilon > 0)$

$$\exists n_0 \text{ et } n_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{l} n \geq n_0 \Longrightarrow |u_{2n} - l| \leq \varepsilon \\ n \geq n_1 \Longrightarrow |u_{2n+1} - l| \leq \varepsilon \end{array} \right.$$

Posons $N = \max\{2n_0, 2n_1 + 1\}$, $\forall n \geq N$, $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$ ou $n = 2p + 1$
Si $n = 2p$, $2p \geq 2N \Longrightarrow p \geq n_0 \Longrightarrow |u_{2p} - l| \leq \varepsilon$
Si $n = 2p + 1$, $2p + 1 \geq 2N + 1 \Longrightarrow p \geq n_1 \Longrightarrow |u_{2p+1} - l| \leq \varepsilon$
Ceci montre que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = l$. □

Exemple : Soit $(u_n)_n$ une suite tel que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^*, \quad o \leq u_{m+n} \leq \frac{m+n}{mn}$$

$(u_n)_n$ converge vers 0, car les deux suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers 0.

THÉORÈME 5.1. *(Théorème de Bolzano-Weierstrass)* **De toute suite réelle bornée on peut extraire une sous-suite convergente.**

Démonstration : Nous procéderons par dichotomie. Soit $(u_n)_n$ une suite bornée, contenue dans le segment $[a_0, b_0]$. On va définir une suite d'intervalles emboîtés $(I_n)_n$ telle que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, I_n contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$.
3. La longueur de I_n est égale à $\dfrac{b-a}{2^n}$.

On choisit $I_0 = [a_0, b_0]$, supposons I_n choisi, $I_n = [a_n, b_n]$, par récurrence I_n contient une infinité de termes de la suite. Donc il existe une infinité de termes dans au moins l'un des intervalles $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ ou $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$, on choisit pour I_{n+1} cet intervalle. Il en résulte que les deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes, convergeant vers l.
Construisons maintenant la sous-suite. On choisit $\varphi(0) = 0$. Si $\varphi(1)$, $\varphi(2)$,...,$\varphi(n-1)$ sont choisis, on choisit $\varphi(n)$ tel que $\varphi(n) > \varphi(n-1)$ et $u_{\varphi(n)} \in I_n$ ce qui possible puisque I_n contient une infinité de termes de la suite. On en conclut que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$$

Donc $(u_{\varphi(n)})_n$ converge vers l. □

Définition 5.2. *l, la limite de la suite extraite, s'appelle valeur d'adhérence de la suite.*

Remarque : Une suite convergente admet une seule valeur d'adhérence, en conséquence une suite ayant plus d'une valeur d'adhérence est une suite divergente.

••••••••••••