Chapitre 5
Fonctions réelles d'une variable réelle
Limites et continuité

Mohamed TARQI

Table des matières

1 Généralités

1.1 L'ensemble $\mathbb{R}^I$

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. On munit l'ensemble $\mathbb{R}^I$ des applications de I dans $\mathbb{R}$ de deux lois internes (+) et (.) et d'une loi externe définies par :

1. $\forall f,g \in \mathbb{R}^I$, $\forall x \in I$, $\left\{ \begin{array}{rcl} (f+g)(x) & = & f x)+g(x) \\ (fg)(x) & = & f(x)g(x) \end{array} \right.$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall f \in \mathbb{R}^I$, $\forall x \in I$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Proposition 1.1. **$\mathbb{R}^I$ est une algèbre associative, commutative, unitaire (pour les lois ci-dessus définies).**

• L'élément neutre pour l'addition est l'application :

$$\theta : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \theta(x) = 0 \end{array}$$

• L'élément neutre pour la multiplication est l'application :

$$e : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e(x) = 1 \end{array}$$

Remarque : Si I est un intervalle a au moins deux éléments distincts a et b, alors $\mathbb{R}^I$ contient des diviseurs de zéro, c'est-à-dire il existe f et$g$ de $\mathbb{R}^I$ tels que

$$f \neq 0,\ g \neq 0 \text{ et } fg = 0$$

Par exemple :

$$\begin{array}{rrcl} f: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a \end{cases} \end{array}$$
et
$$\begin{array}{rrcl} g: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = b \\ 0 & \text{si } x \neq b \end{cases} \end{array}$$

on a bien $fg = 0$, alors f et g sont déférentes de 0.

Définition 1.1. 1. *Si $g \in \mathbb{R}^I$ et si $\forall x \in I$, $g(x) \neq 0$, on note*

$$\begin{array}{rrcl} \frac{1}{g}: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{g(x)} \end{array}$$

2. *Si $f, g \in \mathbb{R}^I$ et si $\forall x \in I$, $g(x) \neq 0$, on note $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$*

Définition 1.2. *Soit $f \in \mathbb{R}^I$, on appelle graphe de f et on note Γ la partie de $I \times \mathbb{R}$ définie par :*

$$\Gamma = \{(x, f(x)) / x \in I\}$$

1.2 Relations d'ordre dans $\mathbb{R}^I$

Définition 1.3. *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. On définit sur $\mathbb{R}^I$ une relation, notée $\leq$, par :*

$$\forall f, g \in \mathbb{R}^I,\ f \leq g \Longleftrightarrow \forall \in I,\ f(x) \leq g(x)$$

Proposition 1.2.

1. **$\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^I$; cet ordre n'est pas total si I a au moins deux éléments.**
2. **$\leq$ est compatible avec l'addition :**

$$\forall f, g, h \in \mathbb{R}^I,\ (f \leq g \Longrightarrow f + h \leq g + h$$

3. **On a $\forall f, g, h \in \mathbb{R}^I$: $f \leq g$ et $0 \leq h \Longrightarrow fh \leq gh$.**

Démonstration : L'ordre n'est pas total, puisque les deux applications $\chi_{\{a\}}$ et $\chi_{\{b\}}$ ne sont pas comparables. (a et b étant deux éléments distincts de I, χ_A la fonction caractéristique de A)
Les autres propriété sont évidentes. □

Définition 1.4. 1. *Pour $f \in \mathbb{R}^I$, on note $|f|$, l'application définie sur I, par $|f|(x) = |f(x)|$, $\forall x \in I$.*

2. *Pour f et g, on note*

$$\begin{array}{rrcl} \sup(f,g): & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sup(f(x), g(x)) \end{array} \quad \textit{et} \quad \begin{array}{rrcl} \inf(f,g): & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \inf(f(x), g(x)) \end{array}$$

Proposition 1.3. $\forall f, g \in \mathbb{R}^I$, $\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ **et** $\inf(f,g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$.

Démonstration : En effet, il suffit de remarquer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \text{ et } \min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|.$$

En particulier, $\sup(f(x), -f(x) = |f(x)|$. □

Définition 1.5. *Pour tout f de $\mathbb{R}^I$, on note $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0)$*

On déduit que

$$f^+ + f^- = \frac{1}{2}(f + |f|) + \frac{1}{2}(-f + |f|) = |f|$$

et

$$f^+ - f^- = \frac{1}{2}(f + |f|) - \frac{1}{2}(-f + |f|) = f$$

1.3 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 1.6. *Soit $f \in \mathbb{R}^I$, avec I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.*
1. On dit que f est majorée si $f(I)$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$.
2. On dit que f est minorée si $f(I)$ est une partie minorée de $\mathbb{R}$.
3. On dit que f est bornée si elle est majorée et minorée.

Remarque :

1. f est majorée si, et seulement si, , il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $M \geq f(x)$, $\forall x \in I$.
2. f est minorée si, et seulement si, , il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $m \leq f(x)$, $\forall x \in I$.
3. f est bornée si, et seulement si, , il existe une constante $M > 0$ telle que $| f(x) | \leq M$, $\forall x \in I$.

Proposition 1.4. *(et définition)* **Si $f \in \mathbb{R}^I$ est majorée (resp. minorée) alors $f(I)$ admet une borne supérieure (resp. inférieure) dans $\mathbb{R}$, appelée borne supérieure (resp. inférieure) de f et notée $\sup_{x \in I} f(x)$ (resp. $\inf_{x \in I} f(x)$).**

Ce résultat est une conséquence du théorème de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
On a :

$$\sup_{x \in I} f(x) = \sup f(I) = \sup\{f(x)/x \in I\}$$

et

$$\inf_{x \in I} f(x) = \inf f(I) = \inf\{f(x)/x \in I\}$$

1.4 Fonctions monotones

Définition 1.7. *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathbb{R}^I$.*
• On dit que f est une fonction croissante (resp.décroissante) si et seulement si

$$\forall x, y \in I, x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y) \; (resp. f(x) \geq f(y))$$

• On dit que f est une fonction strictement croissante (resp.strictement décroissante) si et seulement si

$$\forall x, y \in I, x < y \Longrightarrow f(x) < f(y) \; (resp. f(y) < f(x))$$

• On dit que f est une fonction monotone (resp.strictement monotone) si et seulement si$f$ est une fonction croissante ou décroissante (resp.strictement croissante ou décroissante)

Remarques :

1. Toute application strictement monotone est injective.
2. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux applications croissantes et si $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est croissante. De même si f et g sont décroissante, alors $g \circ f$ est croissante.

1.5 Parité et périodicité

Définition 1.8. *Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire $\forall x \in I$, $-x \in I$. Soit $f \in \mathbb{R}^I$.*

1. *On dit est f est paire si, et seulement si, $\forall x \in I$, $f(-x) = f(x)$.*
2. *On dit est f est impaire si, et seulement si, $\forall x \in I$, $f(-x) = -f(x)$.*

Remarques :

1. Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe $(y'oy)$.
2. Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, le graphe d'une fonction impaire admet l'origine pour centre de symétrie.

Proposition 1.5. **Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0. Toute fonction $f \in \mathbb{R}^I$ s'écrit d'une manière unique comme somme d'une fonction paire et une fonction impaire.**

Démonstration : Soit $f \in \mathbb{R}^I$, en notant :

$$g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2}(f(x)+f(-x)) \end{array} \quad \text{et} \quad h : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2}(f(x)-f(-x)) \end{array}$$

il est clair que g est paire, h est impaire et $f = h + g$.
Supposons qu'il existe g' paire, h' impaire tels que $f = g' + h'$, alors on a :

$$0 = (g - g') + (h - h')$$

donc $g - g' = h' - h$ est à la fois paire et impaire, donc $g' = g$ et $h' = h$. □

Définition 1.9. *Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $T \in \mathbb{R}$.*

1. *On dit que f est $T-$périodique si, et seulement si, $\forall x \in I$, $x + T \in I$ et $f(x + T) = f(x)$. On dit que T est une période de f.*
2. *On dit que f est périodique si, et seulement si, s'il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que f soit $T-$périodique.*

Remarques :

1. Si T est une période de f, tout nombre kT, où $k \in \mathbb{N}$, est aussi une période de f. L'une des périodes positives est plus petite que toutes les autres ; c'est alors ce nombre que l'on appelle plus précisément période de la fonction f.
2. Pour construire le graphe (Γ) d'une fonction $T-$périodique, il suffit de construire l'arc relatif à $[\alpha, \alpha + T[$, α étant un nombre quelconque et par des translations à droite et à gauche, parallèles à l'axe des x, on déduit le graphe de f.

Exemple : Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

On vérifie qu'elle admet pour période tout nombre rationnel r, en effet $x+r$ est rationnel (resp. irrationnel) si, et seulement si, x est rationnel (resp. irrationnel). Il n'existe pas dans ce cas de période positive plus petite que toutes les autres.

Proposition 1.6. **L'ensemble des périodes d'une d'une fonction périodique, définie sur $\mathbb{R}$, est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.**

Démonstration : Soit f une fonction périodique. Alors 0 est une période de f et si T et T' sont deux périodes de f, $T - T'$ est aussi une période de f. □

2 Notion de limite

2.1 Limite d'une fonction f en un point a

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. On note $\bar{I}$ l'intervalle fermé de mêmes extrémités que I, et $\overset{\circ}{I}$ l'intervalle ouvert de mêmes extrémités que I.

Définition 2.1. *Soit $a \in \bar{I}$. On dit que f admet $l \in \mathbb{R}$ pour limite en a si, et seulement si, :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ (|x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

Proposition 2.1. **Si f admet une limite l en a, alors l est unique.**

Démonstration : Supposons que f admet deux limites l et l' en a, par exemple $l < l'$.
Soit $\varepsilon = \frac{l'-l}{2}$. Par hypothèse :

$$\exists \eta_1 > 0,\ \forall x \in I,\ (|x-a| < \eta_1 \Longrightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon)$$

$$\exists \eta_2 > 0,\ \forall x \in I,\ (|x-a| < \eta_2 \Longrightarrow l' - \varepsilon < f(x) < l' + \varepsilon)$$

Soit $\alpha = \min(\eta_1, \eta_2)$

$$\forall x \in I,\ (|x-a| < \alpha \Longrightarrow f(x) < l + \varepsilon \text{ et } f(x) > l' - \varepsilon\ )$$

mais

$$l + \varepsilon = l' - \varepsilon = \frac{l + l'}{2}$$

ce qui est en contradiction. □

Notation : Si f admet la limite l en a, on note $l = \lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$ ou $l = \lim_a f$ ou $f(x) \longrightarrow_{x \longrightarrow a} l$.

Remarques :

1. Si la fonction f admet une limite l en a, alors la fonction $h \longrightarrow f(a+h)$ admet la limite l en 0.
2. Si la fonction f admet une limite l en a, alors la fonction $x \longrightarrow f(x) - l$ admet la limite 0 en a.

Exemple : Montrons que $f(x) = x^2 + 2x$ a pour limite 3 quand x tend vers 1. Soit $\varepsilon > 0$.

$$|f(x) - 3| < \varepsilon \Longleftrightarrow |x-1||x+3| < \varepsilon$$

Bornons-nous au nombres x tels que $|x-1| < 1 \Longleftrightarrow 0 < x < 2$, donc

$$3 < x + 3 < 5 \Longrightarrow |x+3| < 5 \Longrightarrow |x-1||x+3| < 5|x-1|$$

On peut donc affirmer que l'on a $|x-1||x+3| < \varepsilon$ pour tout nombre x qui vérifié à la fois $|x-1| < 1$ et $|x-1| < \frac{\varepsilon}{5}$. Le nombre $\eta = \inf(1, \frac{\varepsilon}{5})$ répond à la question.

THÉORÈME 2.1. **Pour que la fonction f admette la limite l en a, il faut et il suffit que : Pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de I telle que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x_n = a$, on a $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = l$.**

Démonstration : Par hypothèse :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (0 < |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x)-l| < \varepsilon)$$

Pour η,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists \text{ tel que } \forall n \geq n_0 \Longrightarrow |x_n - a| < \eta$$

Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \Longrightarrow |f(x_n) - l| < \varepsilon)$$

donc $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = l$
Réciproquement : Supposons que f n'admette pas l pour limite en a, c'est-à-dire

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in I, (0 < |x-a| < \eta \text{ et } |f(x)-l| > \varepsilon)$$

en particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, pour $\eta = \frac{1}{n}$, $\exists x_n \in I$ tel que

$$(|x_n - a| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - l| > \varepsilon$$

Donc la suite $(x_n)_n$ de I ainsi construite converge vers a et $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers l. □

Proposition 2.2. **Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = l$ et si $\alpha < l < \beta$, il existe un intervalle J contenant le point a tel que :**

$$\forall x \in I \cap J,\ x \neq a \Longrightarrow \alpha < f(x) < \beta.$$

Démonstration : Soit $\varepsilon = \inf(l-\alpha, \beta - l)$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (0 < |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x)-l| < \varepsilon)$$

et fortiori $\alpha < f(x) < \beta$. Il suffit de prendre $J =]a-\eta, a+\beta[$.
En particulier si la limite l est positive (resp. négative), il existe un intervalle J contenant a tel que sur $I \cap J$, sauf peut être au point a, $f(x)$ est positif (resp. négatif). □

Corollaire 2.1. **Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = l$ et si $\alpha < f(x) < \beta$, alors $l \in [\alpha, \beta]$.**

Démonstration : En effet $l < \alpha$ entraînerait l'existence d'un intervalle J tel que, sur $I \cap J$, on aurait $f(x) < \alpha$ (proposition précédente), en contradiction avec $f(x) \in [\alpha, \beta]$.
De même $l > \beta$ conduirait à une contradiction. □

Remarque : D'après ce corollaire, si f est positive (resp.négative) admet une limite, alors cette limite est positive ou égale à 0 (resp.négative ou égale à 0)

Corollaire 2.2. **Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = l$, $\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x) = l'$, $l > l'$, il existe un intervalle J contenant le point a tel que $\forall x \in I \cap J$, $x \neq a \Longrightarrow f(x) > g(x)$.**

Démonstration : Soit $l' \leq l$, d'après le corollaire précédent appliqué successivement à f avec $\alpha = \lambda$ et à g avec $\beta = \lambda$

$$\exists J_1 =]a - \eta_1, a + \eta_1[\text{ tel que } \forall x \in I \cap J_1 \text{ et } x \neq 0,\ f(x) > \lambda$$

$$\exists J_2 =]a - \eta_2, a + \eta_2[\text{ tel que } \forall x \in I \cap J_2 \text{ et } x \neq 0,\ g(x) < \lambda$$

Donc il suffit de prendre $J = J_1 \cap J_2 =]a - \alpha, a + \alpha[$, avec $\alpha = \min(\eta_1, \eta_2)$. □

Corollaire 2.3. **f et g étant des fonctions définies sur un même intervalle J où $f(x) > g(x)$, si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x) = l'$ alors $l \geq l'$.**

Démonstration : En effet l'hypothèse $l' > l$ conduirait à une contradiction, d'après ce qui précède. □

Proposition 2.3. **f, g, h étant des fonctions définies sur le même intervalle I où $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in I$. Si g et h admettent la même limite l quand x tend vers a, alors f admet la limite l quand x tend vers a.**

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$

$$\exists \eta_1 > 0,\ \forall x \in I,\ (|x-a| < \eta_1 \Longrightarrow l-\varepsilon < g(x) < l+\varepsilon)$$

$$\exists \eta_2 > 0,\ \forall x \in I,\ (|x-a| < \eta_2 \Longrightarrow l-\varepsilon < h(x) < l+\varepsilon)$$

Soit $\alpha = \min(\eta_1, \eta_2)$, donc $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x-a| < \alpha \Longrightarrow l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon)$$

donc $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = l$. □

Proposition 2.4. $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = l \Longrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow a} |f(x)| = |l|$.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$

$$\exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ (|x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x)-l| < \varepsilon)$$

donc $\varepsilon > 0$

$$\exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ (|x-a| < \eta \Longrightarrow ||f(x)|-|l|| < |f(x)-l| < \varepsilon)$$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x \longrightarrow a} |f(x)| = |l|$. □

2.2 Limite à droite, limite à gauche

Définition 2.2. *f étant définie sur un intervalle ouvert I dont l'extrémité inférieure est a. On dit que f admet au point a la limite à droite $l \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ (0 < x-a < \eta \Longrightarrow |f(x)-l| < \varepsilon)$$

Notations : $l = \lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x)$ ou $l = f(a^+)$. Cela n'implique pas l'existence de $f(a)$.
Nous définissons de même la limite à gauche, quand f est définie à gauche de a sur un intervalle ouvert dont l'extrémité supérieure est a :

$$l = \lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) \text{ ou } l = f(a^-)$$

Proposition 2.5. **Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow a^-} f(x) = l$ existent et sont égales, alors f admet une limite l en a.**

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$

$$\exists \eta_1 > 0,\ \forall x \in I,\ (0 < x-a < \eta_1 \Longrightarrow |f(x)-l| < \varepsilon)$$

$$\exists \eta_2 > 0,\ \forall x \in I,\ (-\eta_2 < x-a < 0 \Longrightarrow |f(x)-l| < \varepsilon)$$

Soit $\alpha = \inf(\eta_1, \eta_2)$, alors $\forall x \in I$, $(0 < |x-a| < \alpha \Longrightarrow |f(x)-l| < \varepsilon)$. Donc $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = l$. □

Exemple : La fonction $f(x) = \frac{\sin(x)}{|x|}$, $x \neq 0$ n'admet pas de limite en 0 : $-1 = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = 1$.

2.3 Limite d'une fonction f en $\pm\infty$

Définition 2.3. *f étant une fonction définie sur un intervalle I de la forme $]a,+\infty[$, on dit que f admet la limite l en $+\infty$ et on écrit $l = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}$ si, et seulement si,*

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists A>0,\ \text{tel que } \forall x\in I,\ x\geq A \Longrightarrow |f(x)-l|<\varepsilon.$$

Définition 2.4. *f étant une fonction définie sur un intervalle I de la forme $]-\infty,a[$, on dit que f admet la limite l en $-\infty$ et on écrit $l = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)$ si, et seulement si,*

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists B>0,\ \text{tel que } \forall x\in I,\ x\leq -B \Longrightarrow |f(x)-l|<\varepsilon.$$

Exemple : $\forall \varepsilon>0,\ |x|>\frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow \left|\frac{1}{x}\right|$. On en déduit, en interprétant le signe de $\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\frac{1}{x}=0^-$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}=0^+$.

Remarque : Si nous posons $\varphi(y)=f(\frac{1}{y})$, nous constatons que

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=l \Longleftrightarrow \lim_{y\longrightarrow 0^+}\varphi(y)=l$$

En effet, $\forall x>B \Longrightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$ est équivalent à $0<y<\frac{1}{B}\Longrightarrow |\varphi(y)-l|<\varepsilon$.

2.4 Limites infinies

Définition 2.5. *f étant une fonction définie sur un intervalle I et $a\in\bar{I}$. On dit que f tend vers $+\infty$ (resp.$-\infty$) quand x tend vers a et on écrit $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x)=+\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x)=-\infty$ si, et seulement si,*

$$\forall A>0,\ \exists \eta>0,\ \text{tel que } \forall x\in I,\ |x-a|<\eta \Longrightarrow f(x)>A \ (\text{ resp. } f(x)<-A\ ).$$

Définition 2.6. *f étant une fonction définie sur un intervalle I de la forme $]a,+\infty[$. On dit que f tend vers $+\infty$ (resp.$-\infty$) quand x tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=+\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)=+\infty$ si, et seulement si,*

$$\forall A>0,\ \exists B>0,\ \text{tel que } \forall x\in I,\ x>B \Longrightarrow f(x)>A \ (\text{ resp. } f(x)<-A\ ).$$

Définition 2.7. *f étant une fonction définie sur un intervalle I de la forme $]-\infty,a[$. On dit que f tend vers $+\infty$ (resp.$-\infty$) quand x tend vers $-\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)=+\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)=-\infty$ si, et seulement si,*

$$\forall A>0,\ \exists B>0,\ \text{tel que } \forall x\in I,\ x<-B \Longrightarrow f(x)>A \ (\text{ resp. } f(x)<-A\ ).$$

Théorème 2.2. **Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$, $f:]a,b[\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction croissante.**

1. **Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b et $\lim\limits_{x\longrightarrow b} f(x)=\sup\limits_{x\in]a,b[} f(x)$.**
2. **Si f n'est pas croissante, alors f admet $+\infty$ pour limite en b.**

Démonstration : On va donner une démonstration dans les cas où b est finie (les cas $b=+\infty$ étant analogue)
1. Par hypothèse, $f(]a,b[)$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, donc admet une borne supérieure l dans $\mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon>0$. Il existe $y=f(\xi)\in f(]a,b[)$, avec $\xi\in]a,b[$ tel que :

$$l-\varepsilon<f(\xi)\leq l$$

Alors, pour tout $x\in]a,b[$:

$$\xi\leq x \Longrightarrow f(\xi)\leq f(x)\Longrightarrow l-\varepsilon\leq f(x)\leq l \Longrightarrow |f(x)-l|\leq\varepsilon$$

Donc pour $\alpha=b-\xi>0$, on a :

$$\forall x \in]a,b[,\ 0 < b - x \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Ce qui preuve que $\lim\limits_{x \longrightarrow b} f(x) = l$

2. Soit $A > 0$. Puisque f n'est pas majorée, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $f(\xi) \geq A$. Or f est croissante, donc

$$\forall x \in]a,b[: x \geq \xi \Longrightarrow f(x) \geq f(\xi) \geq A$$

Soit $\alpha = b - \xi > 0$, donc :

$$\forall x \in]a,b[, 0 < b - x \leq \alpha \Longrightarrow f(x) \geq A$$

ce qui preuve que $\lim\limits_{x \longrightarrow b} f(x) = +\infty$. □

Corollaire 2.4. **soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Alors, en tout point a de I, f admet une limite à gauche et une limite à droite finies, et :**

$$\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x)$$

Démonstration : L'application f est croissante et majorée par $f(a)$ sur $I \cap]-\infty, a[$, et est croissante et minorée par $f(a)$ sur $I \cap]a, +\infty[$. □

Remarque : Un résultat analogue pour f décroissante.

3 Opérations sur les limites

3.1 Limites finies

On montre à l'aide de la définition de la limite les résultats suivants :

Proposition 3.1. **Étant donné deux fonctions f et g ayant chacune une limite fine en a et un nombre réel λ, les fonctions $f+g, \lambda f, fg$ ont une limite en a et on a :**

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (f+g)(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) + \lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x)$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \lambda f(x) = \lambda \lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow a} fg(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x). \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x).$

Théorème 3.1. **Étant donné une fonction g ayant une limite non nulle en a, la fonction $\frac{1}{g}$a une limite en a et on a : $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \frac{1}{g}(x) = \frac{1}{\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x)}$.**

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ et un intervalle J contient a tel que $|g(x)| > \alpha$, $\forall x \in J$. d'autre part on a :

$$\forall x \in J,\ \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l} \right| = \left| \frac{g(x) - l}{g(x) l} \right| \leq \frac{1}{|l| \alpha} |g(x) - l|$$

Donc $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{l}$. □

Théorème 3.2. *(Composée de deux fonctions)* **Soient f une fonction définie sur I et g une fonction définie sur J tel que $f(I) \subset J$. Si f admet une limite b en a et g admet une limite l en b alors $g \circ f$ admet l pour limite en a.**

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Puisque g admet l pour limite en b, alors :

$$(1) \qquad (\exists \beta > 0) \ (\forall y \in J), 0 < |y - b)| < \beta \Longrightarrow |g(y) - l)| < \varepsilon$$

et la limite de f en a entraîne :

$$(2) \qquad (\exists \alpha > 0), (\forall x \in I), 0 < |x - a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - b| < \beta.$$

de (1) et (2) on déduit :

$$(\exists \alpha > 0), (\forall x \in I), 0 < |x - a| < \alpha \Longrightarrow |g(f(x) - l| < \varepsilon$$

Donc $g \circ f$ admet l comme limite en a. □

3.2 Limites infinies

Énonce des résultats : Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et $a \in \overline{I}$. Alors on les résultats suivants, résumés dans les tableaux ci-dessous.

	si f a pour limite	et si g a pour limite	alors $(f+g)$ a pour limite
1	l	$+\infty$	$+\infty$
2	l	$-\infty$	$-\infty$
3	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
4	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
5	$+\infty$	$-\infty$	on ne peut conclure

	si $|f|$ a pour limite	et si $|g|$ a pour limite	alors $|fg|$ a pour limite
1	$l \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$
2	0	$+\infty$	on ne peut conclure
3	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

	si$|g|$ a pour limite	alors $\frac{1}{|g|}$ a pour limite
1	0	$+\infty$
2	$+\infty$	0

4 Fonctions continues

4.1 Continuité en un point

Définition 4.1. *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On dit que f est continue en a si, et seulement si, f admet la limite $f(a)$ quand x tend vers a, c'est-à-dire*

$$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists \alpha > 0) \ (\forall x \in I, \ \ |x - a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

Définition 4.2. *Une fonction f définie sur un intervalle contenant a est dite discontinue en a s'elle n'est pas continue en a.*

Remarque : Si f tend vers $f(a)$ seulement quand x tend vers a^+ (resp.a_-), on dit que la fonction f n'est continue qu'à droite (resp.à gauche) en a.
Contrairement à ce qui peut se passer pour les limites, l'existence simultanée de la limite à droite et la limite à gauche de a entraîne la continuité de f en a. D'où la proposition :

Proposition 4.1. **Une fonction f est continue en a si, et seulement si, elle est continue à droite et à gauche de a.**

Exemple : $f(x) = E(x)$ ($E(x)$ la partie entière de x). f est discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$.

Proposition 4.2. **Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. f est continue en a si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de I convergeant vers a, on a : $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.**

Corollaire 4.1. **Soit $(u)_{n \geq 0}$ une suite définie par la relation**

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$$

**avec f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset I$.
Si $(u)_{n \geq 0}$ est convergente alors sa limite l est solution de l'équation $f(x) = x$.**

Exemple : Considérons la suite récurrente définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_{n+1}=\sin u_n. \\ u_0 \in]0,\frac{\pi}{2}] \end{array}\right.$$

$]0,\frac{\pi}{0}]$ est stable par la fonction sinus, donc $\forall n \geq 0,\ u_n \in]0,\frac{\pi}{0}]$ et $u_{n+1}=\sin u_n \leq u_n$. La suite $(u)_{n\geq 0}$ est décroissante minorée par 0 donc converge vers 0, l'unique solution de l'équation $\sin(x)=x$.

4.2 Continuité globale

Définition 4.3. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est continue sur l'intervalle I si et seulement si f est continue en tout point de I. On note $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.*

THÉORÈME 4.1. L'ensemble $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $\mathbb{R}^I$ pour les lois usuelles, c'est-à-dire :

1. $1 \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$.
2. $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ **est $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour l'addition et la loi externe.**
3. $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ **est stable par multiplication.**

Proposition 4.3. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Alors la fonction $|f|$ est continue sur I.

Remarque : Si f et g sont continues sur I, alors $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont continues sur I. En particulier, si f est continue sur I, alors f^+ et f^- sont continues sur I.

Exemples des fonctions continues

1. Toute fonction constante : $x \longmapsto \lambda$ (λ réel) est continue sur $\mathbb{R}$
2. Toute fonction polynômiale : $x \longmapsto a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Toute fonction rationnelle : $x \longmapsto \dfrac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + \ldots + b_1 x + b_0}$ est continue sur son domaine de définition.
4. Les fonctions cosinus et sinus $x \longrightarrow \cos(x)$, $x \longmapsto \sin(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
5. La fonction tangente $x \longmapsto \tan(x)$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

THÉORÈME 4.2. *(Composée de deux fonctions)* **Soient f une fonction définie sur I et g une fonction définie sur J tel que $f(I)\subset J$. Soit $a \subset I$. Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(a)$ alors $g\circ f$ est continue en a.**

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Puisque g est continue en $f(a)$, alors :

$$(1)\ \ (\exists \beta > 0)(\forall y \in J) \quad |y - f(a)| < \beta \Longrightarrow |g(f(x) - g(f(a))| < \varepsilon$$

et la continuité de f en a entraîne :

$$(2) \qquad (\exists \alpha > 0)\ \ (\forall x \in I) \quad |x-a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \beta.$$

de (1) et (2) on déduit :

$$(\exists \alpha > 0)\ \ (\forall x \in I)\ \ |x-a| < \alpha \Longrightarrow |g(f(x) - g(f(a))| < \varepsilon$$

Donc $g\circ f$ est continue en a. □

Prolongement par continuité

Définition 4.4. *Soit une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle contenant a, mais pas en a et admettant une limite l en a.*
Considérons la fonction : $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \left\{\begin{array}{lll} f(x) & si & x \neq a \\ l & si & x = a \end{array}\right.$$

Cette fonction g est continue en a car $\lim\limits_{x\longrightarrow a} g(x) = g(a)$. On dit que g est un ***prolongement par continuité*** *de f en a.*

Exemple : $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$ si $x\neq 0$. f n'est pas définie en 0 mais $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)=1$
Donc la fonction

$$\begin{array}{rcl} g: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x=0 \end{cases} \end{array}$$

est un prolongement par continuité de f en $x_0=0$.

4.3 Continuité par morceaux

Définition 4.5. *Une fonction f est dit continue par morceaux sur $[a,b]$ si elle n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité ou elle admet des limites à droite et à gauche finies.*
Autrement dit, il existe n de N^*, $d_0,d_1,\ldots,d_n$ tels que $a=d_0<d_1<..<d_n=b$ avec f prolongeable par continuité sur $[d_k,d_{k+1}]$ pout tout $k=0,1,\ldots,n-1$.

Exemples :

1. $x\longmapsto E(x)$ (partie entière de x) est une fonction continue par morceaux sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$.
2. La fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } 0\leq x<\frac{1}{3} \\ 2 & \text{si } x=\frac{1}{3} \\ \frac{2}{2x+1} & \text{si } \frac{1}{3}\leq x\leq 1 \end{cases}$$

est continue par morceaux.

5 Propriétés des fonctions continues sur un segment

5.1 Image d'un segment par une fonction continue

THÉORÈME 5.1. **L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.**

Il en résulte que : Si f est continue sur $[a,b]$ alors f est bornée sur $[a,b]$ et atteint ses bornes, c'est à dire :

$$\exists m,M\in\mathbb{R} \text{ tels que } f([a,b])=[m,M]$$

et

$$\exists\alpha\in[a,b] \text{ tel que } f(\alpha)=m \text{ et } \exists\beta\in[a,b] \text{ tel que } f(\beta)=M.$$

Démonstration : Si f est non bornée, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists x_n\in[a,b]$ tel que $|f(x_n)|\geq n$, $(x_n)_n\subset[a,b]$, d'après le théorème de BOLZANO-WEIRSTRASS il existe une sous suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers $x\in[a,b]$. Mais $f(x_{\varphi(n)})_n$ ne converge pas, ce qui est absurde.
Soit $M=\sup f([a,b])$ et $m=\inf([a,b])$. Supposons que $\forall x\in[a,b],\quad f(x)\neq M$, posons alors $g(x)=\frac{1}{M-f(x)}$ pour tout $x\in[a,b]$. g définie et continue sur $[a,b]$, donc il existe $N>0$ tel que $\forall x\in[a,b],\ |\frac{1}{f(x)-M}|<N$, c'est-à-dire $|M-f(x)|\geq\frac{1}{N}$ $\forall x\in[a,b]$, ce qui entraîne que : $f(x)<M-\frac{1}{N}$, donc M ne serait pas la borne supérieure de f, ce qui est contradictoire. □

Remarques : Si f est définie sur un intervalle non fermé ou non borné les conclusions du théorème peut-être fausse par exemple :

1. $\begin{array}{rcl} f:]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \tan(x) \end{array}$
2. $\begin{array}{rcl} g:[0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & 2x^2+1 \end{array}$

5.2 Théorème des valeurs intermédiaires

THÉORÈME 5.2. *(Théorème des valeurs intermédiaires)* **Soient f un fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $(a,b)\in I^2$ $(a<b)$ tel que $f(a)\le f(b)$. Alors f prend toute valeur de l'intervalle $[f(a),f(b)]$, c'est-à-dire :**

$$\forall\gamma\in[f(a),f(b)],\ \exists c\in I \text{ tel que } f(c)=\gamma.$$

Démonstration : Le résultat est trivial si $\gamma=f(a)$ ou $\gamma=f(b)$. Supposons donc $f(a)<\gamma<f(b)$. Soit l'ensemble

$$C=\{x\in[a,b]/f(x)\le\gamma\}$$

C est non vide ($a\in C$) est majoré par b, donc il admet une borne supérieure c, donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists x_n\in C$ tel que $c-\frac{1}{n}<x_n\le c$, donc $(x_n)_n$ converge vers c et par suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(c)$. On a aussi $f(x_n)<\gamma$ ce qui implique $f(c)\le\gamma$.
D'autre part $\forall x>c$, on a : $f(x)>\gamma$, par passage à la limite, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow c^+}=f(c)\ge\gamma$. Finalement on a : $f(c)=\gamma$. □

Cas particulier :

Corollaire 5.1. **Si f est continue sur $[a,b]$ et si $f(a)f(b)<0$, alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution sur $[a,b]$.**

Démonstration : Il suffit de remarquer que 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$. □

Exemple : $f(x)=\cos(x)-x, I=[0,\pi]$, on a :

$$f(0)=1 \text{ et } f(\pi)=-1-\pi$$

donc $f(0)\,f(\pi)<0\Longrightarrow\exists\alpha\in]0,\pi[$ tel que $\cos(\alpha)=\alpha$.

Application : Tout polynôme de degré impaire admet au moins une racine dans $\mathbb{R}$.
En effet, soit $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ un tel polynôme. Supposons pour simplifier que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}P(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}P(x)=-\infty$

$$\exists A\ \in\ \mathbb{R}^{+*}\ \textit{tel que}\ x\ge A\Longrightarrow P(x)\ge1\ \textit{et}\ x\le-A\Longrightarrow P(x)\le-1$$

En particulier $P(-A)<0<P(A)$
donc il existe $\alpha\in[-A,A]$ tel que $P(\alpha)=0$.

Corollaire 5.2. **L'image d'un intervalle par une fonction continue est intervalle.**

Démonstration : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, montrons que $f(I)$ est intervalle, c'est-à-dire :

$$\forall(y_1,y_2)\in f(I)^2,\ \ [y_1,y_2]\subset f(I)$$

Soient $(y_1,y_2)\in f(I)^2$ et $y\in[y_1,y_2]$. Prenons $(x_1,x_2)\in I^2$ tel que $y_1=f(x_1)$ et $y_2=f(x_2)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x\in I$ compris entre x_1 et x_2 tel que $y=f(x)$. Donc $y\in f(I)$. □

Proposition 5.1. **Si f est continue et strictement croissante sur I, le tableau suivant donne l'intervalle $f(I)$ en fonction de I**

I	$[a,b]$	$[a,b[$	$]a,b]$	$]a,b[$
$f(I)$	$[f(a),f(b)]$	$[f(a),\lim\limits_b f[$	$]\lim\limits_a f,f(b)]$	$]\lim\limits_a f,\lim\limits_b f[$

Démonstration : Montrons par exemple $f(]a,b]) =]\lim\limits_a f, f(b)]$. On a, puisque f est croissante :

$$\forall x \in I, f(x) \leq f(b)$$

et donc $f(b)$ est le plus grand élément de $f(I)$.

1. Si f n'est pas minorée, alors :
$$f(I) =]-\infty, f(b)]$$
ce qui donne le résultat puisque $\lim\limits_b f = -\infty$.
2. Si f est minorée, sa limite en a est $\inf f(I)$ et $f(I)$ est alors un intervalle de bornes $f(a)$ et $m = \lim\limits_a f$ qui est égal à $\inf f(I)$ (car f est croissante)
Comme I n'a pas de plus petit élément, pour tout $x \in I$, on peut trouver $y \in I$ tel que $y < x$, on aura alors $m \leq f(y) < f(x)$, ce qui montre que $\forall x \in I$, $f(x) \neq m$, ce qui implique $m \notin f(I)$.
Donc $f(I) =]\lim\limits_a f, f(b)]$. □

Remarque : On a un résultat analogue si f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle I :

Proposition 5.2. **Si f est continue et strictement décroissante sur I, le tableau suivant donne l'intervalle $f(I)$ en fonction de I**

I	$[a,b]$	$[a,b[$	$]a,b]$	$]a,b[$
$f(I)$	$[f(b),f(a)]$	$]\lim\limits_b f, f(a)]$	$[f(b), \lim\limits_a f[$	$]\lim\limits_b f, \lim\limits_a f[$

5.3 Fonctions continues et strictement monotone.

Théorème 5.3. *(Fondamental)* **Si f est une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors :**

1. **f est une bijection de I sur $f(I)$.**
2. **La fonction réciproque f^{-1} est continue, strictement monotone (dans le même sens que f) de $f(I)$ sur I.**
3. **La courbe de f et celle de f^{-1} sont symétrique par rapport à la première bissectrice.**

Démonstration : Supposons, pour simplifier, que f est strictement croissante sur l'intervalle I.

1. Soit y et y' deux points de $f(I)$. Posons $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$, on ainsi $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. D'après la croissance stricte de f, les différences $x - x'$ et $f(x) - f(x')$ ont le même signe, ce qui exprime que les différences $y - y'$ et $f^{-1}(y) - f^{-1}(y')$ ont aussi le même signe ; et donc f^{-1} est strictement croissante.
Si f est strictement monotone, alors f est injective et par conséquent f est une bijection de I dans $f(I)$.
2. Soit $y_0 = f(x_0)$, $x_0 = f^{-1}(y_0) \in]a,b[$, $a = \inf I$, $b = \sup I$ et soit $\varepsilon > 0$, il existe alors α et β deux points de I tels que :
$$a < \alpha < x_0 < \beta < b$$
avec $|x_0 - \alpha| < \varepsilon$ et $|x_0 - \beta| < \varepsilon$. Posons $\gamma = f(\alpha)$ et $\gamma' = f(\beta)$, on a :
$$\gamma < y_0 < \gamma'$$
et soit $0 < \delta \leq \inf(|y_0 - \gamma|, |y_0 - \gamma'|)$. $\forall y \in f([a,b])$, $|y - y_0| < \delta$ on a $\gamma < y < \gamma'$ donc $\alpha \leq f^{-1}(y) \leq \beta$ ce qui entraîne : $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$, donc f^{-1} est continue en y_0.
3. Du fait que les points $M(x, f(x))$ et $M'(f(x), x)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice, la courbe de f^{-1} est symétrique de celle de f par rapport à la première bissectrice. □

Remarque : On a :

$$\forall x \in I, \forall y \in f(I),\ f(x) = y \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Étude d'un exemple : fonction racine $n^{ième}$.
Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}$, considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x^n$.
∘ f est continue sur $\mathbb{R}^+$ (polynômiale)
∘ Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y$

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1})$$

donc $x^n < y^n$
Alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, et

$$\begin{array}{rcl} f([0,+\infty[) & = & [0, \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)[\\ & = & [0,+\infty[\end{array}$$

Théorème et définition 5.1. **La fonction $x \longmapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ et sa réciproque s'appelle la fonction racine $n^{ième}$ et on la note $\sqrt[n]{\ }$.**

On a : $\forall x \in [0,+\infty[$, $\forall y \in [0,+\infty[$

$$y = x^n \Longleftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$$

On note aussi : $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.
Par convention $x^0 = 1$ pour $x > 0$.

••••••••••