Chapitre 5
FONCTIONS DÉRIVÉES

Mohamed TARQI

Table des matières

••••••••••

1 Dérivabilité - Différentiébilité

1.1 Dérivée,dérivée à droite,dérivée à gauche

Définition 1.1. • *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. On dit que f est* **dérivable** *en x_0 si*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe. Lorsqu'elle existe, cette limite se note $f'(x_0)$, $D(f)(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$. elle est appelé **nombre dérivé** *de f en x_0.*
• *On dit que f est dérivable à droite (resp.à gauche) en x_0 si*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (resp. \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0})$$

existe. On la note note $f'_d(x_0)$ (resp.$f'_g(x_0)$).

Exemples :

1. $f(x)=\frac{1}{x}, x_0 \neq 0$. Cherchons $f'(x_0)$.
   Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et $x \neq x_0$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{-1}{xx_0}\\ &= \frac{-1}{x_0^2}.\end{aligned}$$

   La fonction : $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée en x_0 est $\frac{-1}{x_0^2}$.

2. Dérivée de la fonction sinus. Soit $x_0 \in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h} &= \frac{2\sin(\frac{h}{2})\cos(x_0+\frac{h}{2})}{h}\\ &= \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos(x_0+\frac{h}{2})\end{aligned}$$

   Donc on déduit, en passant à la limite $h \longrightarrow 0$, que $\sin'(x_0)=\cos(x_0)$.

3. $f(x)=x^2+|x|$, $x_0=0$
   On a :

$$\begin{aligned}f'_d(0) &= \lim_{x\to 0, x>0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\\ &= \lim_{x\to 0, x>0}(x+1)=1.\end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned}f'_g(0) &= \lim_{x\to 0, x<0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\\ &= \lim_{x\to 0, x<0}(x-1)=-1\end{aligned}$$

Proposition 1.1. **Pour que f soit dérivable au point x_0 il faut et il suffit que f admette une dérivée à droite et une dérivée à gauche au point x_0 qui soient égales.**

THÉORÈME 1.1. **Si f est dérivable en x_0 , f est continue en x_0**

Démonstration : Soit $\varepsilon>0$.

$$\exists\beta>0 : |x-x_0|<\beta \Longrightarrow \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<\varepsilon$$

d'où :

$$|f(x)-f(x_0)| = \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right||x-x_0| < (\,|f'(x_0)|\,+\varepsilon)|x-x_0|$$

donc

$$\exists\alpha=\inf(\frac{\varepsilon}{|f'(x_0)|\,+\varepsilon},\beta) : |x-x_0|<\alpha \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

donc

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

c'est à dire f est continue en x_0. □

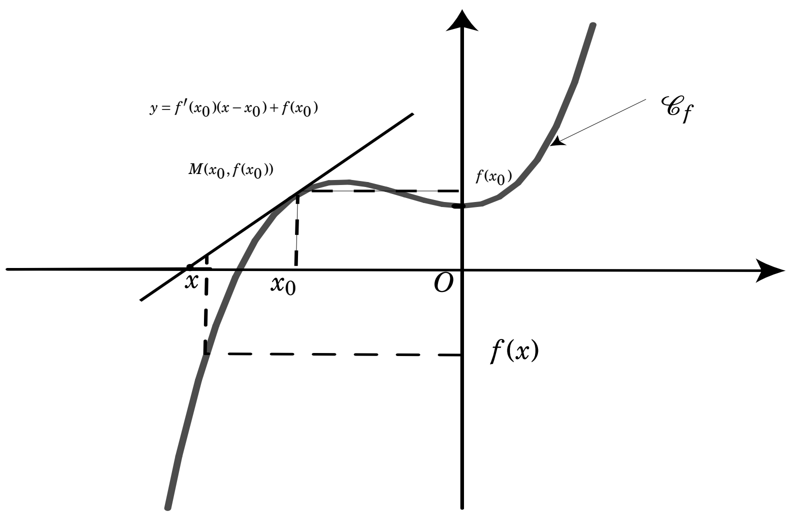

FIGURE 1 – L'interprétation géométrique du nombre dérivée

Remarque : La réciproque du théorème est fausse, par exemple : $f(x) = |x|$, f est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

1.2 Différentiabilité en un point.

Définition 1.2. *Soit f une fonction définie sur un voisinage centré en x_0. On dit que f est différentiable au point x_0 s'il existe $l \in \mathbf{R}$ et une fonction $\varepsilon : x \longrightarrow \varepsilon(x)$ définie sur un intervalle I de centre 0 telles que :*

$$(\forall h \in I) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + lh + h\varepsilon(h)$$

avec

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

Remarque : f est différentiable en $x_0 \Longleftrightarrow f$ est dérivable en x_0 et $l = f'(x_0)$.

Définition 1.3. *L'application, notée df_{x_0}, définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$(\forall h \in \mathbb{R}) \quad df_{x_0}(h) = f'(x_0).h$$

est appelé fonction différentielle de f en x_0.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DU NOMBRE DÉRIVÉ : Soit f une fonction définie sur un intervalle centré en x_0 et C_f sa courbe représentative.
Si f est dérivable en x_0, alors C_f admet au point $M_0(x_0, f(x_0))$ une tangente d'équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Remarque : Si $\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, alors C_f admet au point $M_0(x_0, f(x_0))$ une tangente verticale.

1.3 Fonction dérivée-Dérivées successives.

Définition 1.4. • *On dit que f est dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si f est dérivable en tout point de I. L'application, notée f', définie par :*

$$\begin{array}{rccc} f': & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & f'(x) \end{array}$$

est appelé fonction dérivée de f.
• *Si f' est elle-même dérivable sur I alors on définit $(f')'$ notée f'' applée dérivée seconde de f est ainsi se suite. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}$ désigne la dérivée de $f^{(n-1)}$, c'est la dérivée $n^{ième}$ de f.*
Par convention

$$f^{(0)} = f.$$

Notation : $f^n = D^n(f) = \frac{d^n f}{dx^n}$

Définition 1.5. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que F est une primitive de f sur I si et seulement si*

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x).$$

Définition 1.6. • *Une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe C^n si $f^{(n)}$ existe sur I et y continue. On note $C^n(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^n de I sur $\mathbb{R}$.*
• *Lorsque f est de classe C^n pour tout n, on dit que f est de classe C^∞.*

$\mathbb{R}$m $\mathscr{C}^\infty = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{C}^n$.

1.4 Opérations sur les fonctions dérivées

THÉORÈME 1.2. **Si f et g sont dérivables sur un intervalle I, alors $f+g$, fg et λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) sont dérivables sur I et $\forall x \in I$, on a**

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
2. $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$,
3. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Remarque : L'ensemble $\mathscr{D}(I)$ des fonctions dérivables sur l'intervalle I, muni de l'addition, de la multiplication, et de la multiplication par un scalaire a une structure d'algèbre commutative et unitaire.

Corollaire 1.1. **L'application dérivation $D : \mathscr{D}(I) \longrightarrow \mathbb{R}^I$, qui à f associé f', est linéaire.**

Remarque : La dérivation n'est pas un morphisme d'algèbres, puisque on a : $D(1) = 0 \neq 1$.

Dérivées des fonctions usuelles

D_f	$f(x)$	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	$f(x) = \lambda$	$f'(x) = 0$
$\mathbb{R}$	$f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$[0, +\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\forall x \in]0, +\infty[$
$\mathbb{R}$	$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$\mathbb{R}$	$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
D_u	$f(x) = u^n(x)$	$f'(x) = nu^{n-1}(x)u'(x)$
$\mathbb{R}$	$f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$	$f'(x) = \omega\cos(\omega x + \varphi)$
$\mathbb{R}$	$f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$	$f'(x) = -\omega\sin(\omega x + \varphi)$

Proposition 1.2. **(Dérivée d'une fonction composée) Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g\circ f$ est dérivable en x_0 et**

$$(g\circ f)'(x_0)=f'(x_0)g'(f(x_0)).$$

Ainsi si $f(x)=(u(x))^n, n\in\mathbb{N}^*$

$$f'(x)=n(u(x))^{n-1}u'(x)$$

Démonstration : Soit $\beta>0$. Comme f est dérivable en x_0, elle est continue en x_0.

$$(\exists\alpha>0):|x-x_0|<\alpha\Longrightarrow|f(x)-f(x_0)|<\beta$$

On pose, pour $|h|<\alpha$

$$\varepsilon(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\Longleftrightarrow f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+h\varepsilon(h)$$

avec

$$\lim_{h\to0}\varepsilon(h)=0$$

de même, pour $|k|<\beta$

$$g(f(x_0)+k)=g(f(x_0))+kg'(f(x_0))+k\varepsilon_1(k)$$

avec

$$\lim_{k\to0}\varepsilon_1(k)=0$$

comme par hypothèse, pour $|h|<\alpha$, $|f(x_0+h)-f(x_0)|<\beta$, on peut alors écrire

$$\begin{array}{rcl} g(f(x_0+h)) & = & g(f(x_0))+(hf'(x_0)+h\varepsilon(h))g'(f(x_0))+(hf'(x_0)\\ & & +h\varepsilon(h))\varepsilon_1(hf'(x_0)+h\varepsilon(h))\\ & = & g(f(x_0))+hf'(x_0)g'(f(x_0)+h\varepsilon(h))g'(f(x_0))+(hf'(x_0)\\ & & +h\varepsilon(h))\varepsilon_1(hf'(x_0)+h\varepsilon(h))\\ & = & g(f(x_0))+hf'(x_0)g'(f(x_0)+h\varepsilon_2(h) \end{array}$$

avec

$$\varepsilon_2(h)=\varepsilon(h))g'(f(x_0))+((f'(x_0)+\varepsilon(h))\varepsilon_1(hf'(x_0)+h\varepsilon(h))$$

et

$$\lim_{h\to0}\ \varepsilon_2(h)=0$$

ce qui prouve le résultat. □

Applications :

1. Si g est dérivable en x_0 et $g(x_0)\neq0$, alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en x_0 et $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_0)=\dfrac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, en effet, soit $f(x)=\dfrac{1}{x}$, alors $\frac{1}{g}=f\circ g$, d'où :

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)=f'(g(x_0).g'(x_0)=\frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

2. Si f et g sont dérivables sur I et $\forall x\in I,\ \ g(x)\neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\forall x\in I$,
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{f(x)^2}.$$
3. Soit f une fonction dérivable. a et b deux constantes réelles, alors la fonction $g: x\longmapsto f(ax+b)$ est dérivable et on a :
$$g'(x)=af'(ax+b).$$

Proposition 1.3. **Si f est une application continue, strictement monotone sur I, dérivable en a avec $f'(a)\neq 0$. Alors f est dérivable en $b=f(a)$ et**
$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Démonstration : Pour $x\neq a$ et $y\neq b$, on a $\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b}=\frac{x-a}{f(x)-f(a)}$ avec $x=f^{-1}(y)$. Posons $\varphi(x)=\frac{x-a}{f(x)-f(a)}$, alors $\lim\limits_{x\longrightarrow a}\varphi(x)=\frac{1}{f'(a)}$. D'autre part f^{-1} étant continue, donc la fonction
$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b}=\varphi[f^{-1}(y)]$$
tend vers $\frac{1}{f'[f^{-1}(a)]}=\frac{1}{f'(b)}$ quand x tend vers x_0. □

THÉORÈME 1.3. **(Formule de LEIBNIZ [1]) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$, et $a\in I$ telles que $f^{(n)}(a)$ et $g^{(n)}(a)$ existent. Alors fg est n fois dérivable en a et**
$$(fg)^{(n)}(a)=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k f^{(k)}(a)g^{(n-k)}(a)$$

Démonstration : La démonstration se fait par récurrence sur n. □

2 Application : Étude des fonctions

2.1 Théorème de ROLLE

Définition 2.1. *On dit que la fonction f définie sur un voisinage de x_0 admet un **maximum relatif** (resp. **minimum relatif**) s'il existe un intervalle $]x_0-\alpha,x_0+\alpha[$ sur lequel on a :*
$$\forall x\in]x_0-\alpha,x_0+\alpha[,\ f(x)\leq f(x_0)\ \ (\textit{resp.}\ f(x)\geq f(x_0))$$
*On dit que f admet un **extremum relatif** si et seulement si f admet un maximum relatif ou minimum relatif.*

Proposition 2.1. **Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f: I\longrightarrow\mathbb{R}$ une application. Si f admet un extremum relatif en $c\in I$ et si $f'(c)$ existe alors $f'(c)=0$.**

1. Gottfried Whihelm von Leibniz (1646-1718), allemand.À l'origine avec Newton du calcul différentiel.

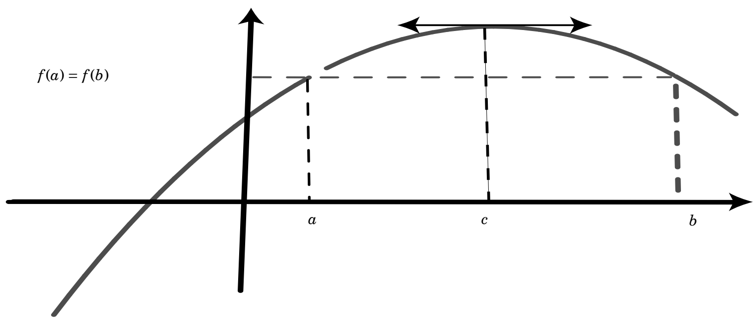

FIGURE 2 – L'interprétation géométrique du théorème de Rolle.

Démonstration : Pour simplifier, supposons que $f(c)$ est un maximum relatif. Donc il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que :

$$\forall x > c \quad \text{et} \quad x \in J \Longrightarrow f(x) \geq f(c)$$

et

$$\forall x < c \quad \text{et} \quad x \in J \Longrightarrow f(x) \leq f(c)$$

alors

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

et comme f est dérivable en c alors

$$f'(c) = f'_d(c) = f'_g(c) = 0$$

□

THÉORÈME 2.1. (Théorème de ROLLE [2]) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :
∘ f **est continue sur** $[a,b]$,
∘ f **est dérivable sur** $]a,b[$.
∘ $f(a) = f(b)$,
Alors il existe $c \in]a,b[$ **tel que** $f'(c) = 0$

Démonstration : Si f est constante le résultat est évident.
Sinon, il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) \neq f(a)$, par exemple $f(x_0) > f(a)$.
D'autre part il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$. (la continuité de f sur $[a,b]$)
Or

$$f(c) \geq f(x_0) > f(a) = f(b),$$

donc $c \in]a,b[$, donc, $f(c)$ étant un extremum de f, on a $f'(c) = 0$. □

2. Michel Rolle, 1652-1719, mathématicien français à l'origine de la notation $\sqrt[n]{x}$.

THÉORÈME 2.2. **(Théorème des accroissements finis) Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une application vérifiant :**
- **f est continue sur $[a,b]$,**
- **f est dérivable sur $]a,b[$.**

Alors il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

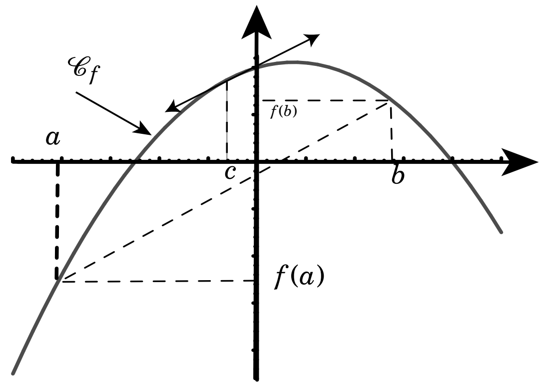

FIGURE 3 – L'interprétation géométrique du théorème des accroissements finis.

Exemple : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrons que le polynôme $P_n=\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ admet n racines deux à deux distinctes. En effet le polynôme $Q_n=(x^2-1)^n$ à deux racines distinctes d'ordre n, 1 et -1.
D'après le théorème de ROLLE, il existe $x_1^{(1)}\in]-1,1[$ tel que $Q_n'(x_1^{(1)})=0$, donc le polynôme Q_n' a trois racines distinctes : $-1<x_1^{(1)}<1$, de même , par application de théorème de ROLLE, on montre que le polynôme Q_n'' a quatre racines distinctes : $-1<x_1^{(2)}<x_2^2<1$ et ainsi de suite.
Donc le polynôme Q_n^{n-1}, de degré $n+1$, admet $(n+1)$ racines distinctes :

$$-1<x_1^{(n-1)}<x_2^{(n-1)}<\ldots<x_{n-1}^{(n-1)}<1,$$

donc par application de théorème de ROLLE à chacun des intervalles

$$[-1,x_1^{(n-1)}],[x_2^{(n-1)},x_3^{(n-1)}],\ldots[x_{n-1}^{(n-1)},1]$$

on déduit que le polynôme $P_n=\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n=Q_n^{(n)}$ admet n racines distinctes sur $[-1,1]$:

$$-1=x_1^{(n)}<x_2^{(n)}<\ldots<x_n^{(n)}=1,$$

et sont les seuls puisque P_n est de degré n.

2.2 Théorème des accroissements finis

Démonstration : Posons $A=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $\varphi:[a,b]\to f(x)-A(x-a)$. La fonction φ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifie $\varphi(a)=f(a)=\varphi(b)$, donc d'après le théorème de *Rolle*, il existe $c\in]a,b[$ tel que $\varphi'(c)=0$.
On en déduit

$$f'(c)=A=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

d'où le résultat. □

Exemple : Soient f et g deux applications continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que :

$$[f(b)-f(a)]g'(c)=[g(b)-g(a)]f'(c).$$

En effet, il suffit d'applique le théorème précédent à la fonction

$$\varphi(x)=[f(b)-f(a)]g(x)-[g(b)-g(a)]f(x)$$

sur l'intervalle $[a,b]$.

Proposition 2.2. **Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur l'intervalle $[a,+\infty[$.**
Si

$$f(a)=g(a) \quad et \quad f'(x)\geq g'(x) \quad \forall x\in[a,+\infty[$$

alors

$$f(x)\geq g(x), \forall x\in[a,+\infty[$$

Démonstration : On pose : $h=f-g$
Soit $x>a$. h est continue sur $[a,x]$ et dérivable sur$]a,x[$, donc d'après le théorème des accroissements finis il existe $c\in]a,x[$: $h'(c)=\frac{h(x)-h(a)}{x-a}\geq 0$
donc $h(x)\geq 0$.

2.3 Inégalité des accroissements finis

Proposition 2.3. **Soient a et b des réels tels que $a<b$ ainsi qu'une fonction f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. S'il existe des réels m et M vérifiant :**

$$\forall x\in]a,b[, \quad m\leq f(x)\leq M$$

alors on a :

$$m(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq M(b-a).$$

Démonstration : D'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c\in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$. L'hypothèse $m\leq f'(c)\leq M$ implique $m(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq M(b-a)$ □

Exemple : Soient a et b deux réels tels que $0<a<b$, alors

$$\frac{1}{b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{a}$$

En effet, si $x\in[a,b]$, alors $\frac{1}{b}<\ln'(x)=\frac{1}{x}<\frac{1}{a}$, d'où le résultat.

2.4 Dérivée et sens de variation d'une fonction

THÉORÈME 2.3. **Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I.**
- **f est constante sur I si et seulement si $f'(x)=0, \forall x\in I$**
- **f est croissante sur I si et seulement si $f'(x)\geq 0, \forall x\in I$**
- **f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x)\leq 0, \forall x\in I$**

Démonstration : Soit x_0 de I, on a :

$$f'(x_0)=\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

est positif.
Réciproquement, supposons $f'(x)\geq 0$ pour tout x de I. Soient x_1 et x_2 de éléments de I tels que $x_1<x_2$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c\in]x_1,x_2[$ tel que

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(c)\geq 0$$

et par suite $f(x_2)\geq f(x_1)$. Donc f est croissante.
Si f est décroissante, $-f$ est croissante, la démonstration en résulte.
Une fonction est constante si, et seulement si, elle est croissante et décroissante, c'est-à-dire $f'=0$. □

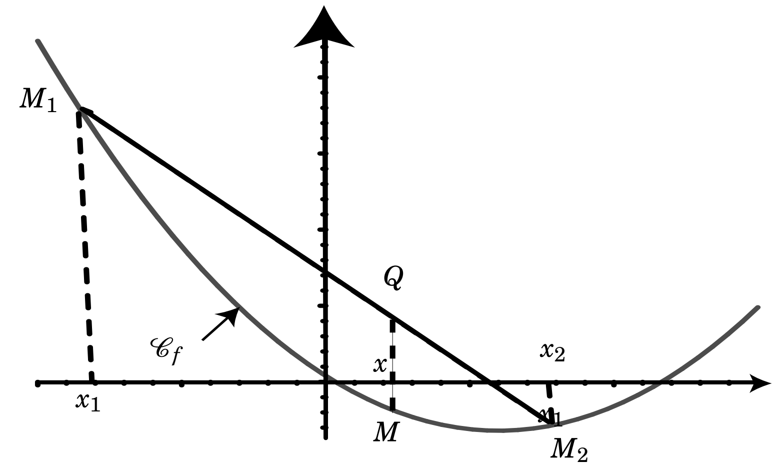

FIGURE 4 – La courbe d'une fonction convexe.

2.5 Convexité-Concavité-Point d'inflexion

Définition 2.2. *Soit $\wp_f$ le graphe d'une fonction f défine sur un intervalle I. On dit que $\wp_f$ est* ***convexe*** *(resp.* ***concave****), si tout arc $\overset{\frown}{MN}$ de $\wp_f$ est situé au* ***dessous*** *(resp. au* ***dessus*** *) de la droite (MN).*
On dit que f admet un point d'inflexion P si $\wp_f$ ***change la concavité*** *de gauche à droite du point P.*

THÉORÈME 2.4. **Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et $\wp_f$ sa courbe représentative.**
◦ **Si $f''(x) > 0, \forall x \in I$, alors $\wp_f$ est convexe.**
◦ **Si $f''(x) > 0, \forall x \in I$, alors $\wp_f$ est concave.**

Démonstration : Montrons le théorème dans le cas où $f'' \geq 0$, l'autre cas est similaire.
Considérons deux éléments quelconques x_1 et x_2 de I tel que $x_1 < x_2$, auxquels sont associés les points $M_1(x_1, f(x_1))$ et $M_2(x_2, f(x_2))$ de son graphe Γ. $x_1, x_2 = px + m$ étant l'équation de la droite (M_1M_2), étudions sur $[x_1, x_2]$ le signe de la fonction :

$$\varphi(x) = f(x) - (px + m)$$

On a :

$$\varphi'(x) = f'(x) - p \text{ et } \varphi''(x) = f''(x)$$

Comme $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$, le théorème de ROLLE entraîne l'existence d'un élément c de $[x_1, x_2]$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Par ailleurs le fonction φ' est croissante, donc c est unique.

x	x_1			c			x_2
φ''				$+$			
φ'		$\nearrow$		0		$\nearrow$	
φ	0	$\searrow$		$\mu<0$		$\nearrow$	0

D'après le tableau de variations de φ, on déduit que l'arc $\widehat{M_1M_2}$ de Γ est situé au-dessus de la droite (M_1M_2), ce qui démontre le théorème. □

Remarque : Si $f''(x_0) = 0$ avec changement de signe, alors le point $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion pour $\wp_f$

2.6 Étude des branches infinies

Le dessin suivant donne les différents types des branches infinies rencontrées lors d'une étude d'une fonction.

1. $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty} \to$ la droite $x=x_0$ est asymptote verticale
2. $\boxed{\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)=y_0} \to$ la droite $y=y_0$ est asymptote horizontale
3. $\boxed{\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)=\pm\infty} \to$
   - 1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty \to$ *B.p de sens l'axe des ordonnées*
   - 2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=0 \to$ *B.p de sens l'axe des abscisses*
   - 3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a (a\neq 0) \to$
     - $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]=\pm\infty \to$ $B.p{:}y=ax$
     - $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]=b \to$ $A.o{:}y=ax+b$

$B.p$: Branche parabolique.

• • • • • • • • • • •