Chapitre 6
FONCTIONS CONVEXES - FONCTIONS USUELLES

Mohamed TARQI

Table des matières

• • • • • • • • • •

1 Fonctions convexes

1.1 Généralités

Dans cette partie I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points et f une application de I dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.1 *On dit que la fonction f est convexe si x_1 et x_2 étant deux points distincts quelconques de I et h étant la fonction affine définie par $h(x_1) = f(x_1)$ et $h(x_1) = f(x_2)$, on a :*

$$\forall x \in [x_1, x_2], \quad f(x) \leq h(x)$$

FIGURE 1 – La courbe d'une fonction convexe.

Si la fonction $-f$ est convexe, on dit que f est concave ; il revient au même de dire que pour tout x de $[x_1,x_2]$, $f(x)\geq h(x)$, h étant la fonction affine prenant pour x_1 et x_2 les mêmes valeurs que f.
Si $M_1(x_1,f(x_1))$, $M(x_2,f(x_2))$ désignent de points de la courbe Γ de f, tout point du segment $[M_1,M_2]$ a pour coordonnés

$$\begin{cases} x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\ \ 0\leq\lambda\leq 1 \\ f(x)=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)\end{cases}$$

donc la définition de convexité peut s'énoncer : Pour tout couple x_1 et x_2 de points distincts de I et pour tout $\lambda\in[0,1]$, $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leq\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$.

Exemples :

1. Toute fonction affine est à la fois convexe et concave.
2. La fonction $|.|: x\longrightarrow |x|$ est convexe, en effet pour tout $\lambda\in[0,1]$ et pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$|\lambda x+(1-\lambda)y\leq\lambda|x|+(1-\lambda)|y|$$

Exercice : Montrer que la fonction $x\longrightarrow x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Proposition 1.1 ***f étant une fonction convexe sur I. Alors pour tout famille $(\lambda_i)_{1\leq i\leq p}$ de réels positifs tel que $\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i=1$, on a :***

$$\forall(x_1,x_2,...,x_p)\in I^p,\ \ f\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i\right)\leq\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f(x_i).$$

Démonstration : La propriété est vrai pour $p=1$, supposons qu'il est vrai pour $p-1$. Soit un famille $(x_1,x_2,...,x_p)\in I^p$ ainsi qu'une famille $(\lambda_i)_{1\leq i\leq p}$ de réels positifs tel que $\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i=1$. Le point $x=\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i x_i$ est un point de I : c'est le barycentre à coefficients positifs d'éléments de I.

1. Si $\lambda_p=1$, alors $\forall i\neq p$, $\lambda_i=0$ et par suite

$$f\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i\right)=f(x_p)\leq\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f(x_i)$$

2. Si $\lambda_p\neq 1$, on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i=\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i x_i+\lambda_p x_p=(1-\lambda_p)\sum_{i=1}^{p-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_p}x_i+\lambda_p x_p$$

Il est clair que $\sum\limits_{i=1}^{p-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_p}=1$ et l'élément $y_p=\sum\limits_{i=1}^{p-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_p}x_i\in I$, donc

$$f(y_p)=f\left(\sum_{i=1}^{p-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_p}x_i\right)\leq\sum_{i=1}^{p-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_p}f(x_i)$$

La convexité de f entraîne alors :

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i\right) &= f((1-\lambda_p)y_p+\lambda_p x_p) \\ &\leq (1-\lambda_p)f(y_p)+\lambda_p f(x_p) \\ &\leq (1-\lambda_p)f\left(\sum_{i=1}^{p-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_p}x_i\right)+\lambda_p f(x_p)\end{aligned}$$

ce qui preuve le résultat pour p. □

Théorème 1.1 ***Si une fonction f est convexe sur un intervalle ouvert I, elle admet en tout point a de I une dérivée à droite et une dérivée à gauche ; f est continue en a.***

Démonstration : Soit μ la fonction définie sur $I\setminus\{a\}$ par :

$$\mu(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Montrons que μ est croissante, en effet soit x et y de $I\setminus\{a\}$.

1. Si $a<x<y$; il existe $\lambda\in]0,1[$ tel que $x=\lambda a+(1-\lambda)y$ et la convexité entraîne

$$f(x)\le\lambda f(a)+(1-\lambda)f(y)$$

ou encore

$$f(x)-f(a)\le(1-\lambda)[f(y)-f(a)]$$

en divisent par $x-a=(1-\lambda)(y-a)$, on obtient $\mu(x)\le\mu(y)$.
2. Si $y<x<a$, le même calcul donc, $x-a$ et $(1-\lambda)(y-a)$ étant maintenant négatifs, $\mu(y)\le\mu(x)$.
3. Si $x<a<y$; il existe $\lambda\in[0,][$ tel que $a=\lambda x+(1-\lambda)y$ et la convexité entraîne

$$f(a)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

ou encore

$$\lambda[f(a)-f(x)]\le(1-\lambda)[f(y)-f(a)]$$

en divisent par $x-a=(1-\lambda)(y-a)$, qui est positif, on obtient $\mu(x)\le\mu(y)$.

En résumé, la fonction μ est croissante sur $I\setminus\{a\}$.
La restriction de μ à $I\cap]-\infty,a[$ qui est croissante et majorée par $\mu(y)$, y étant un nombre fixe supérieur à a, admet donc une limite à gauche, qui est la dérivée à gauche en a, pour la fonction f. De la même manière on montre l'existence d'un d'une dérivée à droite.
Enfin $f(x)-f(a)=(x-a)\mu(x)$ admet pour limite 0 en a, soit à gauche, soit à droite ; la continuité de f en a en résulte.

□

1.2 Convexité et dérivabilité

Proposition 1.2 **Si f est dérivable sur I, alors f est convexe si, et seulement si, la fonction f' est croissante.**

Démonstration : Supposons f convexe. Soient x et y deux points de I tel que $x<y$.

1. Pour tout u de $]x,y[$ on a :

$$\frac{f(u)-f(x)}{u-x}\le\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

Lorsque u tend vers x à droite, on obtient

$$f'(x)\le\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

2. De même on obtient :

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le f'(y)$$

On en déduit :

$$f'(x)\le\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le f'(y)$$

et donc f' est croissante.
Supposons f' croissante. Soit x,y et z de I tels que $x<y<z$, il existe $\lambda\in]0,1[$ tel que $y=\lambda x+(1-\lambda)z$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_1\in]x,y[$ et $c_2\in]y,z[$ tels que

$$f(y)-f(x)=(y-x)f'(c_1)=(1-\lambda)(z-x)f'(c_1)\text{ et }f(z)-f(y)=(z-y)f'(c_2)=\lambda(z-x)f'(c_2)$$

Et puisque $c_1<c_2$, $f'(c_1)\le f'(c_2)$ ce qui entraîne

$$\lambda(f(y)-f(x))\le(1-\lambda)(f(z)-f(y))$$

ou encore

$$f(y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(z)$$

Donc f est convexe. □

Corollaire 1.1 **Un fonction f deux fois dérivable sur I est convexe si, et seulement si, $f''\ge0$.**

FIGURE 2 – La courbe de la fonction sinus et sa réciproque.

Démonstration : En effet, f' est croissante si, et seulement si, $f'' \geq 0$. □

Proposition 1.3 **Si f est une fonction convexe et dérivable sur I, on a :**

$$\forall (x,a) \in I^2, \quad f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a).$$

On dit que le graphe de f est situé au-dessus de chacune de ses tangentes.

Démonstration : D'après le théorème des accroissements finis :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(c)$$

avec c compris entre x et a. On conclut avec la croissance de f', en distinguant les deux cas : $a < c < x$ ou $x < c < a$. □

Exemple : Soient $a_1, a_2, ..., a_n$ des réels strictement positifs. Montrons que

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right).$$

En effet, la fonction $\ln : x \longrightarrow \ln x$ est concave, donc on peut écrire :

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \ln a_i = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} (a_i)^{\frac{1}{n}}\right)$$

qui peut s'écrire aussi

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right).$$

2 Fonctions usuelles

2.1 Fonctions circulaires

2.1.1 La fonction Arcsinus

Définition 2.1 *La fonction*

$$\begin{array}{rccc} \sin : & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$

est continue (impaire), strictement croissante ; c'est donc une bijection de $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1,1]$.
Par conséquent elle admet une fonction réciproque, appelée ***Arcsinus*** *et notée* arcsin*, on a :*

$$\begin{array}{rccc} \arcsin : & [-1,1] & \longrightarrow & [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & x & \longmapsto & \arcsin(x) \end{array}$$

Il en résulte que :
· $\forall x \in [-1,1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$
· $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$
et on a aussi :

$$\forall x \in [-1,1], \forall y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \qquad \sin(x) = y \Longleftrightarrow x = \arcsin(y)$$

FIGURE 3 – La courbe de le fonction cosinus et sa réciproque.

La courbe de arcsin
Elle s'obtient à partir de celle de sin par symétrie par rapport à la première bissectrice
Limites

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\arcsin(x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{\arcsin(x)-\frac{\pi}{2}}{x-1}=+\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+}\frac{\arcsin(x)+\frac{\pi}{2}}{x+1}=+\infty$$

Dérivabilité

$$\forall x\in]-1,1[,\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Développement limité au voisinage de 0 : La fonction $f=\arcsin:]-1,1[\longrightarrow\mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et pour tout $x\in]-1,1[$:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\frac{3}{4}x^4+\ldots+\frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots(2p)}x^{2p}+o(x^{2p+1})$$

Comme de plus $f(0)=0$, on déduit :

$$\arcsin(x)=x+\frac{1}{2}\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1}{5}x^5+\ldots+\frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots(2p)}\frac{1}{2p+1}x^{2p+1}+o(x^{2p+2})$$

2.1.2 La fonction Arccosinus

Définition 2.2 *La fonction*

$$\begin{array}{cccc}\cos: & [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1]\\ & x & \longmapsto & \cos(x)\end{array}$$

est continue (paire), strictement décroissante ; c'est donc une bijection de $[0,\pi]$ *dans* $[-1,1]$.
*Par conséquent elle admet une fonction réciproque, appelée **Arccosinus** et notée* arccos, *on a :*

$$\begin{array}{cccc}\arccos: & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi]\\ & x & \longmapsto & \arccos(x)\end{array}$$

Il en résulte que :
· $\forall x\in[-1,1],\sin(\arccos(x))=x$
· $\forall x\in[0,\pi],\arccos(\sin(x))=x$
et on a aussi :

$$\forall x\in[-1,1],\forall y\in[0,\pi]\qquad \cos(x)=y\Longleftrightarrow x=\arccos(y)$$

La courbe de arccos
Elle s'obtient à partir de celle de cos par symétrie par rapport à la première bissectrice
Limites

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\arccos(x)-\frac{\pi}{2}}{x}=-1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{\arccos(x)}{x-1}=-\infty$$

FIGURE 4 – La courbe de la fonction tangente et sa récipoque.

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{\arccos(x) - \pi}{x+1} = -\infty$$

Dérivabilité

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Propriété

$$\boxed{\forall x \in [-1,1], \quad \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}}$$

2.1.3 La fonction Arctangente

Définition 2.3 *La fonction*

$$\begin{array}{rccc} \tan: &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}$$

est continue (impaire), strictement croissante ; c'est donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *dans* $\mathbb{R}$
Par conséquent elle admet une fonction réciproque, appelée Arctangente et notée arctan, *on a :*

$$\begin{array}{rccc} \arctan: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ & x & \longmapsto & \arctan(x) \end{array}$$

Il en résulte que :
· $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$
· $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan(x)) = x$
et on a aussi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\qquad \tan(x) = y \Longleftrightarrow x = \arctan(y)$$

La courbe de arctan
Elle s'obtient à partir de celle de par symétrie par rapport à la première bissectrice
Limites

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$$

Dérivabilité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Développement limité au voisinage de 0 : La fonction $f = \arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

Comme de plus $f(0) = 0$, on déduit :

$$\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

FIGURE 5 – Les graphes des fonctions $x \longrightarrow \log_a(x)$.

2.2 Fonctions logarithmes et exponentielles

2.2.1 Fonctions logarithmes

Exercice : Déterminer toutes les fonctions réelles définiés sur $]0,+\infty[$ vérifiant :

1. $\forall x, y \in]0,+\infty[\;\; f(xy) = f(x) + f(y)$
2. f est dérivable sur $]0,+\infty[$

Remarque

La fonction nulle vérifie (1) et (2).

Supposons l'existence d'une fonction, non nulle, vérifiant (1) et (2).
∘ On a $f(1) = 0$
∘ Considérons la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = f(xy)$, $y > 0$.

$$\forall x \in]0,+\infty[, \forall y \in]0,+\infty[, \;\; g'(y) = xf'(xy) = f'(y)$$

donc pour $y = 1$ on a :$\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{f'(1)}{x} = \frac{k}{x}$
∘ $k \neq 0$, car la fonction constante ne vérfié pas (1).
On déduit que f est la primitive de la fonction $x :\longrightarrow \frac{k}{x}$ sur $]0,+\infty[$ et qui s'annule au point 1.
Réciproquement :
Soit F la primitive de $x \longrightarrow \frac{k}{x}$ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1.
On a $F'(x) = \frac{k}{x}$
Montrons que F vérifié :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \forall y \in]0,+\infty[\quad F(xy) = F(x) + F(y)$$

Posons $h(y) = F(xy)$, alors $h'(y) = \frac{k}{y}$
donc

$$\exists c \in \mathbb{R} : h(y) = F(y) + c \;\; \forall y \in]0,+\infty[$$

et comme $F(1) = 0$, alors $h(1) = F(x) = c$
d'où

$$F(xy) = f(x) + F(y)$$

Définition 2.4 *La fonction primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$, qui s'annule en 1, s'appelle fonction logarithme Népérien, on la note* $\ln$.

Propriétés

∘ La fonction ln est continue strictement croissante sur $]0,+\infty[$
∘ $\forall x \in]0,+\infty[$, $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$
∘ $\forall x \in]0,+\infty[, \forall y \in]0,+\infty[\quad \ln xy = \ln x + \ln y$
$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
∘ $\forall x \in]0,+\infty[, \forall r \in \mathbb{Q} \quad \ln x^r = r \ln x$
Limites
∘ $\lim_{x \longrightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
∘ $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ $\quad \lim_{x \longrightarrow 0^+} x \ln x = 0$ $\quad \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ $\quad$ ($\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$)
Dérivabilité
∘ La fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[\quad \ln' x = \frac{1}{x}$

FIGURE 6 – Les courbes des fonctions $x \longrightarrow a^x$.

∘ Si $f(x) = \ln|u(x)|$; u dérivable et ne s'annule pas alors $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Courbe

∘ ln est une bijection de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$

∘ $y = x - 1$ est l'équation de la tangente en 1.

2.2.2 Fonctions exponentielles

Définition 2.5 *La fonction* $x \longmapsto \ln x$ *est une bijection de* $]0,+\infty[$ *dans* $\mathbf{R}$. *Sa fonction réciproque est appelée fonction* $exponontielle$*, notée* $\exp x$ *ou* e^x.

Propriétés

· $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$
· $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x$
· $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ e^{\ln x} = x$
· $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*\ , e^x = y \Longleftrightarrow x = \ln y$
· $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\quad e^{x+y} = e^x e^y$
·$\forall r \in \mathbb{Q}\quad e^{rx} = (e^x)^r$

Limites

$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} e^x = 0;\ \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty$
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty;\ \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} xe^x = 0$
$\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Dérivée

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in R, (e^x)' = e^x$
Si $f(x) = e^{u(x)}$ avec u dérivable alors $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

Définition 2.6 *On appelle fonction puissance* α *la fonction notée* x^α *; définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

Quelques limites
· $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \alpha > 0$
· $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \alpha > 0$
· $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0, \alpha > 0$

2.2.3 Fonctions logarithmes de base 10

Définition 2.7 *Soit* $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. *La fonction* $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ *s'appelle fonction logarithme de base* a.

Cas particulier Si $a = 10$ on dit logarithme décimal et on note $\log$.

Remarque

Les propriétés et l'étude de $\log_a$ se déduisent de celle de ln car :

$$\forall x > 0,\ \log_a(x) = \frac{1}{\ln a}.\ln x$$

x	$-\infty$			$+\infty$
ch'		$-$	$+$	
ch	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$
		1		

FIGURE 7 – Courbes des fonctions ch et sh.

x	$-\infty$		$+\infty$
sh'		$+$	
sh	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2.3 Fonctions hyperboliques

2.3.1 Définitions et propriétés

Définition 2.8 *On appelle cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique et on note respectivement* ch *et* sh *les fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$(1)\ \ \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2},\ (2)\ \ \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

Remarque : Ces fonctions, comme e^x et e^{-x}, sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$; $\mathrm{ch}(x)$ est positif quelque soit x ; $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^{2x}-1}{2e^x}$ est de signe de x, quel que soit $x \neq 0$; $\mathrm{ch}(0) = 1$; $\mathrm{sh}(0) = 0$.

Définition 2.9 *On appelle tangente hyperbolique et cotangente hyperbolique et on note respectivement* th *et* coth *les fonctions définies par :*

$$(3)\ \ \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

$$(4)\ \ \mathrm{coth}(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)} = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$$

tanh est une fonction impaire définie sur $]-\infty,+\infty[$; coth est une fonction impaire définie sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$; elles sont du signe de x quel que soit $x \neq 0$.

2.3.2 Relations entre les fonctions hyperboliques

D'après la définition de ch et sh :

$$(4)\ \ \mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x) = e^x \text{ et } (5)\ \ \mathrm{ch}(x)-\mathrm{sh}(x) = e^{-x}$$

La multiplication membre à membre de ces relations donne la relation :

$$(6)\ \ \mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x) = 1$$

(6) s'écrit aussi sous forme $\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1-\mathrm{th}^2(x)$; d'où, en tenant compte de $\mathrm{ch}(x) > 0$:

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2(x)}} \text{ et } \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{th}(x)}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2(x)}}$$

2.3.3 Variation des fonctions hyperboliques

Tenant compte de la parité nous nous limiterons à $[0,+\infty[$.

$$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x) \text{ et } \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$$

On en déduit, en utilisant la dérivée d'un quotient et de la formule (6),

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1-\mathrm{th}^2(x) \text{ et } \mathrm{coth}'(x) = \frac{-1}{\mathrm{sh}^2(x)} = 1-\mathrm{coth}^2(x)$$

En tenant compte de ces résultats et du fait que sur $[0,+\infty[$, on a $\mathrm{sh}(x) \geq 0$ et $\mathrm{ch}(x) > 0$, on constate que les fonctions ch, sh et th sont croissantes sur $[0,+\infty[$; la fonction coth est décroissante sur $]0,+\infty[$.

x	$-\infty$		$+\infty$
th′		$+$	
th	-1	$\nearrow$	1

FIGURE 8 – Courbes des fonctions th et coth.

x	$-\infty$		0	0		$+\infty$
coth′		$-$			$-$	
coth	-1	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	1

FIGURE 9 – Courbe de la fonction sh et sa réciproque.

x	$-\infty$		$+\infty$
argsh′		$+$	
argsh	-1	$\nearrow$	1

2.3.4 Étude au voisinage de 0

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - 1 - (e^{-x} - 1)}{2} \simeq x \text{ et } \mathrm{th}(x) \simeq x \text{ au voisinage de } 0$$

$$\mathrm{ch}(x) - 1 = \frac{e^x - 2 + e^{-x}}{2} = 2\,\mathrm{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right) \simeq \frac{x^2}{2} \text{ au voisinage de } 0$$

2.3.5 Étude au voisinage de $\pm\infty$

Au voisinage de $+\infty$

$$\mathrm{ch}(x) \simeq \frac{e^x}{2} \text{ et } \mathrm{sh}(x) \simeq \frac{e^x}{2}$$

$$\mathrm{th}(x) - 1 = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \simeq -2e^{-2x}$$

Au voisinage de $-\infty$

$$\mathrm{ch}(x) \simeq \frac{e^{-x}}{2}\ ;\ \mathrm{sh}(x) \simeq -\frac{e^{-x}}{2}\ ;\ \mathrm{th}(x) + 1 \simeq 2e^{2x}.$$

Maintenant on peut dresser le tableau de variation des fonctions hyperboliques :

2.4 Fonctions hyperboliques réciproques

2.4.1 Inversion du sinus hyperbolique

Définition 2.10 *La fonction sinus hyperbolique est une application continue et strictement croissante de* $]-\infty, +\infty[$ *sur* $]-\infty, +\infty[$*. On peut donc définir la fonction réciproque, application continue et strictement croissante de* $]-\infty, +\infty[$ *sur* $]-\infty, +\infty[$*. Cette fonction réciproque est appelée argument sinus hyperbolique ; on la désigne par le symbole arrgsh.*

En résumé

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad y = \mathrm{argsh}(x) \Longleftrightarrow x = \mathrm{sh}(x)$$

La fonction argsh est impaire, son graphe est symétrique par rapport à la première bissectrice de celui de la fonction sh.

FIGURE 10 – Graphe de la restriction de la fonction ch sur $[0, = \infty[$ et sa réciproque.

x	1		$+\infty$
argch′		$+$	
argch	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	-1		$+1$
argth'		$+$	
argth	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

FIGURE 11 – Courbes des fonctions argth et argcoth.

x	$-\infty$		-1	$+1$		$+\infty$
argcoth'		$-$			$-$	
argcoth	-1	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	1

2.4.2 Inversion du cosinus hyperbolique

Définition 2.11 *La restriction à* $[0,+\infty[$ *de la fonction cosinus hyperbolique est une application continue et strictement croissante de* $[0,+\infty[$ *sur* $[1,+\infty[$*. On peut donc définir la fonction réciproque, application continue et strictement croissante de* $[1,+\infty[$ *sur* $[0,+\infty[$*. Cette fonction réciproque est appelée argument cosinus hyperbolique ; on la désigne par le symbole* argch.

En résumé

$$\forall x \geq 1, \forall y \geq 0, \quad y = \operatorname{argch}(x) \Longleftrightarrow x = \operatorname{ch}(x)$$

Le graphe de la fonction argch est symétrique par rapport à la première bissectrice de celui de la restriction à $[0,+\infty[$ de la fonction $cosh$.

2.4.3 Inversion de la tangente hyperbolique

Définition 2.12 *La fonction tangente hyperbolique est une application continue et strictement croissante de* $]-\infty,+\infty[$ *sur* $]-1,1[$*. On peut donc définir la fonction réciproque, application continue et strictement croissante de* $]-1,1[$ *sur* $]-\infty,+\infty[$*. Cette fonction réciproque est appelée argument tangente hyperbolique ; on la désigne par le symbole* argth.

En résumé

$$\forall x \in]-1,1[, y \in \mathbb{R}, \quad y = \operatorname{argth}(x) \Longleftrightarrow x = \operatorname{th}(x)$$

La fonction argth est impaire, son graphe est symétrique par rapport à la première bissectrice de celui de la fonction th.

2.4.4 Inversion de la cotangente hyperbolique

Définition 2.13 *La fonction cotangente hyperbolique est une application continue et strictement croissante de* $]0,+\infty[$ *sur* $]1,+\infty[$*, d'autre part de* $]-\infty,0[$ *sur* $]-\infty,-1[$*. On peut donc définir la fonction réciproque, dite argument cotangente hyperbolique ; on la désigne par le symbole* argcoth.

En résumé

$$\forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[, y \neq 0, \quad y = \operatorname{argcoth}(x) \Longleftrightarrow x = \operatorname{coth}(x)$$

La fonction argth est impaire, son graphe est symétrique par rapport à la première bissectrice de celui de la fonction th.

• • • • • • • • • • •