Chapitre 7
DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Mohamed TARQI

Table des matières

• • • • • • • • • • •

1 Comparaisons locales des fonctions

1.1 Définitions

Dans ce qui suit, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide $\overset{\circ}{I}$. On désigne par a un élément ou une extrémité de I ($a \in \overline{\mathbb{R}}$).

Définition 1.1. *(**Voisinage d'un point**)*
• *Si a est un réel, on appelle voisinage de a toute partie V de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert centré en a, c'est-à-dire qu'il existe $h > 0$ tel que $]a-h, a+h[\subset V$*
• *Si $a = +\infty$, on appelle voisinage de $+\infty$ toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]b, +\infty[$*
• *Si $a = -\infty$, on appelle voisinage de $-\infty$ toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]-\infty, b[$*

Dans tous les cas, on note $V(a)$ un voisinage de a.

Définition 1.2. *Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ il existe un voisinage } V(a) \text{ de } a \text{ tel que } |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|, \ \forall x \in V(a)$$

On note $f =_a o(g)$.

Définition 1.3. *On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si l'application $f - g$ est négligeable devant g au voisinage de a. On note $f \sim_a g$.*

Définition 1.4. *Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est dominée par g au voisinage de a si :*

$$\exists M > 0, \text{ il existe un voisinage } V(a) \text{ de } a \text{ tel que } |f(x)| \leq M|g(x)|,\ \forall x \in V(a)$$

On note $f =_a O(g)$.

Pour une fonction g ne s'annule pas sur I, sauf peut être en a, les définitions précédentes sont équivalentes à :

1. f est négligeable devant g au voisinage de a si, et seulement si, $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
2. f est équivalente à g au voisinage de a si, et seulement si, $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
3. f est dominée par g au voisinage de a si, et seulement si, $\frac{f}{g}$est bornée.

Remarques : • $g \sim g$ définit une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathbb{R}^I$ des applications de I dans $\mathbb{R}$.
• Soit $l \in \mathbb{R}^*$, on a $f \sim_a l \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = l$.
• Si f est négligeable devant g, alors f est dominée par g.

1.2 Propriétés (Domination, Prépondérance)

Proposition 1.1. **Soit f une fonction définie sur un voisinage de a, sauf peut être en a.**
• **$f =_a O(1)$ si, et seulement si, f est bornée au voisinage de a.**
• **$f =_a o(1)$ si, et seulement si, la limite de f au point a est 0.**

Démonstration : • $f =_a O(1)$ est équivalent à l'existence d'un voisinage V de a et une constante $M > 0$ tel que $\forall x \in V$, $|f(x)| \leq M$, donc f est bornée.
• $f =_a o(1)$ est équivalent à l'existence d'un voisinage V de a tel que $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in V$, $|f(x)| \leq \varepsilon$, donc $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = 0$ □

Proposition 1.2. **Soient f, g, h et k des fonctions définies sur un voisinage de a, sauf peut être en a.**
• **Si $f =_a O(h)$ et $g =_a O(k)$, alors $fg =_a O(hk)$.**
• **Si $f =_a o(h)$ et $g =_a o(k)$, alors $fg =_a o(hk)$.**
• **Si $f = o(g)$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, $f^\alpha =_a o(g^\alpha)$**

Démonstration : Ces résultats sont immédiats à partir des définitions, par exemple, pour la troisième propriété $\forall \varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in V$, $|f(x)| \leq \varepsilon g|(x)|$, donc $\forall x \in V$, $|f(x)|^\alpha \leq \varepsilon g|(x)|^\alpha$. c'est-à-dire $f^\alpha =_a o(g^\alpha)$. □

1.3 Propriétés relatives à l'équivalence

Proposition 1.3. **f et g étant deux fonctions définies sur un voisinage de a. Si $f \sim_a g$, alors f et g gardent le même signe au voisinage de a.**

Démonstration : pour simplifier supposons que $g(x) > 0$ sur un voisinage V de a. Si $f \sim_a g$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, donc on a, au voisinage de a, $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, d'où $f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} g(x) > 0$. □

Proposition 1.4. **Soient f, g, h et k des fonctions définies sur un voisinage de a, sauf peut être en a.**
- **Si $f \sim g$ et $g =_a O(k)$, alors $f =_a O(k)$.**
- **Si $f \sim g$ et $g =_a o(k)$, alors $f =_a o(k)$.**
- **Si $f \sim g$ et $g \sim h$, alors $f \sim h$**

Démonstration : Démontrons par exemple la première propriété.
Pour $\varepsilon = 1$, il existe un voisinage V de a tel que

$$\forall x \in V, |f(x)| \leq |g(x)|$$

d'autre part : Il existe un voisinage U de a et une constante $M > 0$ tels que

$$\forall x \in U, |g(x)| \leq M|k(x)|$$

donc $\forall x \in V \cap U$, $|g(x)| \leq M|k(x)|$, alors $f =_a O(k)$. □

Proposition 1.5. **Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de a, sauf peut être en a.**
- **Si $f \sim g$ et si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = l$ $(l \in \overline{\mathbb{R}})$**
- **Réciproquement, si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = l$, avec l réel non nul, alors $f \sim g$.**

Démonstration : Il existe un voisinage V de 0 et une application ε, définie dans V, tels que :

$$\forall x \in V, f(x) = (1 + \varepsilon(x)) g(x)$$

donc $\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x) = l$ entraîne $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = l$.
Réciproquement, il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in V$, $g(x) \neq 0$ $(l \neq 0)$, donc on peut écrire $f(x) = (1 + \varepsilon(x)) g(x)$, avec $\varepsilon(x) = \frac{f(x) - g(x)}{g(x)}$, $\forall x \in V$, et qui tend vers 0. □

Proposition 1.6. **f, g, h, k étant des fonctions définies sur un voisinage de a, sauf peut être en a. Si $f \sim_a g$ et $h \sim_a k$, alors $fh \sim gk$).**

Démonstration : Les deux équivalences $f \sim_a g$ et $h \sim_a k$ impliquent

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x} = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{h(x)}{k(x)} = 1 \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow a} \frac{fh(x)}{gk(x)} = 1$$

donc

$$fh \sim_a gk$$

□

De même on montre la proposition suivante :

Proposition 1.7. **f, g, h, k étant des fonctions définies sur un voisinage de a. Si de plus h et k ne s'annulent pas au voisinage de a sauf peut être en a, et si $f \sim g$ et $h \sim k$, alors $\frac{f}{h} \sim \frac{g}{k}$.**

Remarque : La relation d'équivalence entre fonctions n'est pas compatible avec l'addition, c'est-à-dire que $f \sim_a g$ et $h \sim_a k$, n'entraîne pas $f + h \sim g + k$). Par exemple : $-x + x^2 \sim_0 -x$ et $x + x^3 \sim_0 x$ mais $x^2 + x^3 \nsim 0$.

1.4 Comparaisons usuelles

Proposition 1.8. **soient α, β et γ des réels strictement positifs. Alors**

$$x^{\beta} =_{+\infty} o(e^{\alpha x}),\ e^{\alpha x} =_{-\infty} o(|x|^{-\beta}),\ \ln(x)^{\gamma} =_{+\infty} o(x^{\beta}) \text{ et } |\ln(x)|^{\gamma} =_{0} o(x^{-\beta}).$$

Démonstration : En effet, on a les limites suivantes :

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^{\beta}}{e^{\alpha x}}=0,\ \lim_{x\longrightarrow-\infty}|x|^{\beta}e^{\alpha x}=0,\ \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\ln^{\gamma}(x)}{x^{\beta}}=0 \text{ et } \lim_{x\longrightarrow0^{+}}|\ln^{\gamma}(x)|x^{\beta}=0$$

D'autres exemples usuels :

1. Dans un voisinage de l'origine, on a : $\sin(x)\sim x$, $\tan(x)\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$ et $e^{x}-1\sim x$.
2. Toujours à l'origine, on a : $(1+x)^{m}-1\sim mx$ et $1-\cos(x)\sim\frac{x^2}{2}$.
3. Au voisinage de 1, $x^{m}-1\sim m(x-1)$ et $\ln(x)\sim x-1$.
4. Au voisinage de $\pm\infty$, si $P(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0$ un polynôme ($a_n\neq0$), alors $P(x)\sim a_nx^n$.
5. Soit $Q(x)=\dfrac{a_nx^n+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+...+b_1x+b_0}$, alors $Q(x)\sim_0\dfrac{a_0}{b_0}$ et $Q(x)\sim_{\infty}\dfrac{a_nx^n}{b_mx^m}$. avec ($a_n\neq0, b_m\neq0, a_0\neq0$ et $b_0\neq0$).

$A.o$: Asymptote oblique.

2 Développements limités

Soit f une fonction numérique. Nous avons vu que f est différentiable en un point a s'il existe un voisinage $V(a)$ de a et une application ε définie sur un voisinage de 0 telle que $\lim\limits_{x\longrightarrow0}\varepsilon(x)=0$, pour laquelle, pour tout $x, a+x\in V(a)$,

$$f(a+x)=f(a)+xf'(a)+x\varepsilon(x).$$

Donc la différentiabilité de f peut être vu comme le fait d'approcher une fonction en un point par une fonction polynôme ($x\longrightarrow f(a)+xf'(a)$).
Un développement limité est donc une généralisation de la différentiabilité : On cherche à approcher f par une fonction polynôme.

2.1 Développements limités au voisinage de 0

Dans la suite de cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton.

Définition 2.1. *Soit $f: I\longrightarrow\mathbb{R}$ un application, et supposons $0\in I$. Si $n\in\mathbb{N}^*$, on dit que f admet un développement limité (D.L) d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe $a_0,a_1,...,a_n\in\mathbb{R}$ tels que, au voisinage de 0,*

$$f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n+o(x^n)$$

Le polynôme $a_0+a_1x+...+a_nx^n$ s'appelle la partie régulière du D.L

Exemples :

1. $\sin(x)=x+o(x)$
2. $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+o(x^2)$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow0}\frac{\ln(1+x)-x}{x}=0\Longrightarrow\ln(1+x)=x+o(x)$

Proposition 2.1. **Si f admet un développement limité d'ordre $n\in\mathbb{N}^*$, il est unique.**

Démonstration : Supposons que f admet deux D.L(0) tel que :

$$f(x) = P(x) + o(x^n) \text{ et } f(x) = Q(x) + o(x^n)$$

alors $P(x) - Q(x) = o(x^n)$, soit $a_k x^k$ le monôme de plus bas degré du polynôme $P(x) - Q(x) = o(x^n)$ $P - Q$ alors $P(x) - Q(x) \sim a_k x^k$ au voisinage de 0 ce qui est en contradiction avec $P(x) - Q(x) = o(x^n)$. □

ℝms • Si f admet un D.L d'ordre n, alors il existe un polynôme $P_n(x)$ et une application ε définie sur un voisinage de 0 telle que :

$$f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \longrightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

donc

$$f(x) - P_n(x) =_{x \longrightarrow 0} o(x^n)$$

• L'ordre du D.L est l'entier n sur $o(x^n)$, et non le degré du polynôme P_n.
• Une fonction admet un D.L d'ordre 0 au voisinage de 0 si et seulement si elle continue en 0. Dans ce cas :

$$f(x) = f(0) + o(1)$$

• Une fonction admet un D.L d'ordre 1 au voisinage de 0 si et seulement si elle dérivable en 0.
• Si f admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ au voisinage de 0, alors $f(0) = a_0$, f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$.
• Si une fonction admet un D.L d'ordre n au voisinage de 0 alors pour tout entier m tel que $m \leq n$, cette fonction admet un D.L d'ordre m au voisinage de 0, en effet si

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$$

alors

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + o(x^m)$$

2.2 Développements limités au voisinage de $a \neq 0$

Définition 2.2. *Soit I un intervalle ouvert et $a \in I$. On dit f admet un D.L au voisinage de a si et seulement si la fonction*

$$g : t \longrightarrow f(a + t)$$

admet un D.L au voisinage de 0.

Exemple : $f(t) = \frac{1}{t}$ et $a = 1$
On a au voisinage de 0 :

$$f(1 + u) = \frac{1}{1 + u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$$

d'où au voisinage de 1, on a :

$$\frac{1}{t} = t - (t - 1) + (t - 1)^2 + o((t - 1)^2).$$

2.3 Développements limités au voisinage de ∞

Définition 2.3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a, +\infty[$ (resp.$]-\infty, a[$). On dit que f admet un D.L au voisinage de $+\infty$ (resp.$-\infty$) si et seulement la fonction*

$$g : t \longrightarrow f\left(\frac{1}{t}\right)$$

admet un D.L au voisinage de 0

Exemple : Au voisinage de ∞, on a :

$$\frac{1}{t-1} = \frac{\frac{1}{t}}{1-\frac{1}{t}} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

2.4 Calcul des développements limités

THÉORÈME 2.1. (Formule de Taylor-Lagrange[1])
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^n sur $[a,b]$, telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$. Alors $\exists c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Démonstration : Considérons l'application :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & f(b) - f(x) + (b-x)f'(x) + \ldots + \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) + A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \end{array}$$

la constante A étant choisie telle que $\phi(a) = \phi(b) = 0$. Cette application est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et

$$\forall x \in]a,b[, \phi'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + A\frac{(b-x)^n}{n!}$$

donc d'après le théorème de $Rolle$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\phi'(c) = 0$,
c'est à dire

$$A = f^{(n+1)}(c).$$

□

ℝm

1. Si $n = 0$, on retrouve le théorème des accroissements finis.
2. Si $0 \in I$, on a sous les mêmes hypothèses :
   $$\forall x \in I, \exists \theta \in]0,1[: \ f(x) = f(0) + xf'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x).$$
   sous cette forme, cette relation s'appelle formule de $Maclaurin$ avec reste de $Lagrange$

Corollaire 2.1. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction n fois dérivable en 0, alors f admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre n suivant :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n)$$

1. Lagrange, Joseph Louis de Lagrange (1736-1813), mathématicien et astronome français. Né à Turin, il fit ses études à l'université de cette ville. Il fut nommé professeur de géométrie à l'école militaire de Turin à l'âge de dix-neuf ans ; en 1758, il fonda une société scientifique qui devint ensuite l'Académie des sciences de Turin. En 1766, il fut nommé directeur de la section mathématique de l'Académie des sciences de Berlin et, vingt ans plus tard, il répondit à l'invitation du roi Louis XVI et partit pour Paris. Pendant la période de la Révolution française, il fut chargé d'établir un nouveau système de poids et mesures (voir Métrique, système). Il fut nommé professeur à l'Ecole normale, récemment créée, après la Révolution ; sous Napoléon Ier, il devint membre du Sénat et fut promu comte. Considéré comme l'un des plus grands mathématiciens du XVIIIe siècle, il introduisit de nouvelles méthodes pour le calcul des variations et pour l'étude des équations différentielles, qui lui permirent de donner un exposé systématique de la mécanique dans son célèbre ouvrage Mécanique analytique (1788). Il travailla sur la théorie additive des nombres. On lui doit le théorème sur la décomposition d'un entier en 4 carrés. Dans l'étude des équations algébriques, il introduisit des concepts qui conduiront à la théorie des groupes développée plus tard par Abel et Galois. Parmi ses recherches en astronomie, citons ses calculs sur la libration de la Lune et sur les mouvements des planètes.

Exemples :

1. $f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$
2. $g(x) = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$
3. $h(x) = \sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

Corollaire 2.2. *(**Formule de Taylor-Young**) Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^{n-1}. Soit $a \in I$ tel que $f^{(n)}(a)$ existe. Alors lorsque $h \longrightarrow 0$ on a*

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + o(h^n)$$

2.5 Opérations sur les développements limités

Proposition 2.2. **Soient f et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions admettant au voisinage de 0 des développements limités d'ordre n :**

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$$

où P_n et Q_n sont deux fonctions polynômiales de dgré $\leq n$. Alors

1. **$\lambda f + \mu g$ admet un développement limité d'ordre n donné par :**

   $$(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda P_n(x) + \mu Q_n(x) + o(x^n)$$

   avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
2. **Le produit fg admet un développement limité d'ordre n dont la partie régulière est obtenue en ne gardant que les termes $\leq n$ dans le produit P_nQ_n.**

Démonstration :

1. $\lambda P_n + \mu Q_n$ est un polynôme de degré inférieure ou égal à n et on a :

$$\begin{aligned}
(\lambda f + \mu g)(x) &= \lambda f(x) + \mu g(x) \\
&= \lambda(P_n(x) + o(x^n)) + \mu(Q_n(x) + o(x^n)) \\
&= (\lambda P_n + \mu Q_n)(x) + o(x^n)
\end{aligned}$$

2. Soit A le polynôme de degré n tel que $PQ = A + X^{n+1}R$ avec $R \in \mathbb{R}[X]$. On alors :

$$\begin{aligned}
(fg)(x) &= P_n(x) + o(x^n) + Q_n(x) + o(x^n) \\
&= A(x) + (x^{n+1}R(x) + P(x)o(x^n) + Q(x)o(x^n) + o(x^{2n})) \\
&= A(x) + o(x^n)
\end{aligned}$$

□

THÉORÈME 2.2. **Soient f et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions admettant au voisinage de 0 des développements limités d'ordre n :**

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$$

où P_n et Q_n sont deux fonctions polynômiale de dgré $\leq n$.
Si $f(0) = 0$, la fonction $g \circ f$ admet le même développement limité d'ordre n que le polynôme $Q_n \circ P_n$; on obtient donc ce développement en ne conservant, dans $Q_n \circ P_n$, que les termes d'ordre $\leq n$.

Exemples :

1. Développement de $\ln^2(1+x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0
   On a $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$$\begin{aligned}\ln^2(1+x) &= [x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)]^2 \\ &= x^2 - x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

2. Développement de $e^{\sin(x)}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
   $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$$\begin{aligned}\sin^2(x) &= [x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)]^2 \\ &= x^2 + o(x^3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^3(x) &= [x^2 + o(x^3)][x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)] \\ &= x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

   d'où :
   $e^{\sin(x)} = 1 + (x - \frac{x^3}{6}) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$
3. Développement de $(1+x)^x$ à l'ordre 4 au voisinage de 0, $(1+x)^x = e^{x\ln(1+x)}$
   On a :
   $x\ln(1+x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4)$ et $[x\ln(1+x)]^2 = x^4 + o(x^4)$
   d'où :
   $(1+x)^x = 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$

Proposition 2.3. **On suppose f de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de 0, avec f ' admettant un D.L donné par :**

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$$

alors f admet un D.L d'ordre $n+1$ donné par :

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

Démonstration : Voir chapitre intégration. □

Exemple : On a : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$ et $[\ln(1+x)]' = \frac{1}{1+x}$
alors $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

2.6 Développements limités usuels au voisinage de 0

La formule de $Taylor - Young$ permet d'obtenir facilement les développements limités suivants au voisinages de 0.

- $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^p \dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$
- $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^p \dfrac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$
- $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^6)$.
- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$.
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$.
- $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x}{2} - \ldots - \dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$.
- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$.
- $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2.4}x^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{1.3.\ldots.(2n-3)}{2.4.\ldots.(2n)}x^n + o(x^n)$.
- $\sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2.4}x^2 + \ldots - \dfrac{1.3.\ldots.(2n-3)}{2.4.\ldots.(2n)}x^n + o(x^n)$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha = 1 + \dfrac{\alpha}{1!}x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$.

2.7 Exemples d'utilisation de développement limité

2.7.1 Calcul de limites

- $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)}\right]$.

On a : $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2(x)} = \dfrac{(\sin x - x)(x + \sin x)}{x^2\sin^2 x} = \dfrac{\frac{x^3}{6}.2x + x^4\varepsilon_1(x)}{x^4 + x^4\varepsilon_2(x)}$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$.
D'où :

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)}\right] = \frac{1}{3}.$$

- $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x}$.

On a : $e^{\sin x} - e^{\tan x} = -\dfrac{x^3}{2} + o(x^3)$ et $\sin x - \tan x = -\dfrac{x^3}{2} + o(x^3)$, d'où : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x} = 1$.

- $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$.

Posons $y = \arccos(1-x)$.
On a : $1 - x = \cos y$, donc $x = 1 - \cos y = 2\sin^2(\dfrac{y}{2})$, d'où $\sin(\frac{y}{2}) = \sqrt{\frac{x}{2}}$ et finalement $y = 2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}} \backsim 2\sqrt{\frac{x}{2}} = 2\sqrt{x}$.
Donc $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{2}$.

- $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} + c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x$.

Posons $t = \frac{1}{x}$. On a : $a^{\frac{1}{x}} = a^t = e^{t\ln a} = t\ln a + o(t)$, de même on obtient $b^{\frac{1}{x}} = b^t = e^{t\ln b} = t\ln b + o(t)$ et $c^{\frac{1}{x}} = c^t = e^{t\ln c} = t\ln c + o(t)$.
Donc

$$a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} + c^{\frac{1}{x}} = t\ln abc + o(t)$$

et par conséquent

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x=(t\ln abc+o(t))^{\frac{1}{t}}=e^{\frac{1}{3}\ln abc+o(1)}$$

donc

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x=\sqrt[3]{abc}.$$

2.7.2 Calcul des valeurs approchées

• On a $(1+x)^2=1+2x+x^2$
Le nombre $1+2x$ est une valeur approchée par $défaut$ de $(1+x)^2$, l'incertitude est x^2.
Si $|x|\leq 10^{-1}$ l'incertitude est inférieure à 10^{-2}. Nous écrivons donc

$$(1+x)^2\backsimeq 1+2x.$$

• On a $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$ et $\sqrt{1+x}\leq 1+\frac{x}{2}$
Le nombre $1+\frac{x}{2}$ est une valeur approchée par $excès$ de $\sqrt{1+x}$.
Donc

$$\sqrt{1+x}\backsimeq 1+\frac{x}{2}$$

De même on a, pour x trés petit :

$$\frac{1}{1+x}\backsimeq 1-x,\quad \frac{1}{(1+x)^2}\backsimeq 1-2x,\quad \frac{1}{\sqrt{1+x}}\backsimeq 1-\frac{x}{2}$$

Exemples

• $1,01^2=1+\frac{1}{100}\backsimeq 1.02$
• $\sqrt{97}=\sqrt{100-3}=10\sqrt{1-.3.10^{-2}}\backsimeq 10(1-1,5.10^{-2})=10-0,15=9,85$
• $\dfrac{1}{\sqrt{10016}}=\dfrac{1}{10\sqrt{1+16.10^{-4}}}\backsimeq 10^{-2}(1-8.10^{-4})=10^{-2}-8.10^{-6}=0,009992.$

••••••••••