Devoir libre n°1

à rendre le 10/10/2011

••••••••

Exercice 1

1. Soient A et B deux parties non vide et bornées dans $\mathbb{R}$. Montrer que :
   (a) $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$;
   (b) $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$;
   (c) Si $A \subset B$, alors $\inf(B) \leq \inf(A)$ et $\sup(A) \leq \sup(B)$.
2. On pose $A + B = \{a + b/a \in A \;\text{ et }\; b \in B\}$. Montrer que :
$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$$
et
$$\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B).$$
3. Montrer que $-A = \{-a/a \in A\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ et que l'on a :
$$\sup(-A) = -\inf(A) \;\; et \;\; \inf(-A) = -\sup(A).$$
4. Déterminer, si elle existe, la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble suivant :
$$A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}/n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Exercice 2 Considérons l'ensemble $A = \left\{\frac{n\cos(n)}{n+1}/n \in \mathbb{N}\right\}$. Étudier l'existence des bornes inférieure et supérieure de A.

Exercice 3 Soit a un réel positif fixé. Étudier la suite $(\sqrt[n]{a})_{n\geq 1}$. (si $a > 1$, montrer que $0 \leq \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}$).

Exercice 4 Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier. En déduire que la suite $\sin[(3+\sqrt{5})^n\pi]$ est convergente.

Exercice 5 Soient y un réel positif et n un entier naturel. Montrer qu'il existe un unique réel positif tel que $x^n = y$.

••••••••