•••••••••

On considère la suite $(a_n)_{n\in N}$ de nombres réels définie par la relation de récurrence : $a_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(n-k)!} = 0$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(n-k)!} X^{n-k}$.

1. Vérifier que :
$$a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{12}, a_3 = 0.$$
$$A_1 = X - \frac{1}{2}, A_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}, A_3 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{12}X.$$
2. Montrer que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique suite de polynômes vérifiant :
   i. $A_0 = 1$,
   ii. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A'_n = A_{n-1}$,
   iii. $A_n(0) = A_n(1)$.
3. (a) Déduire de la propriété d'unicité de 1) que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n(X) = (-1)^n A_n(1-X).$$
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $A_n(X+1) - A_n(X) = \frac{X^{n-1}}{(n-1)!}$.
   (c) Soit n un entier impair et supérieur ou égal à 3. Montrer que le polynôme A_n est divisible par $X(X-1)(2X-1)$ et que $a_n = 0$.
4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $S_n(m) = \sum_{k=0}^{m} k^n$.
   (a) Exprimer $S_n(m)$ en fonction de $A_n(m+1)$ et a_{n+1}.
   (b) Déterminer $S_2(m)$.
5. Montrer que la famille $(A_0, A_1, ..., A_n)$ est une base de $E = \mathbb{R}_n[X]$.
6. On considère les endomorphismes de E définis par :
$$\triangle : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longrightarrow & P' \end{array} \qquad D : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longrightarrow & P(X+1) - P(X) \end{array}$$
   (a)) Montrer que $D^{n+1} = \triangle^{n+1} = 0$ et que $\triangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{D^k}{k!}$.
   (b) Montrer que $\ker(\triangle) = \mathbb{R}_0[X]$ et $\mathrm{Im}(\triangle) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. En déduire qu'il existe un unique $Q \in E$ tel que $\triangle(Q) = D(P)$ et $Q(0) = P(0)$.
   (c) On pose $u(P) = Q$, montrer que $u \in \mathbf{GL}(E)$.
   (d) Montrer que pour tout $P \in E$ $u(P) = P(X) + \sum_{k=1}^{n} a_k \left[P^{(k)}(X) - P^{(k)}(0)\right]$.

•••••••••