

Exercice 1 Étudier la suite dont le terme u_n , de rang n , est :

1. $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 \sin \frac{k\pi}{n}$.

2. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{na + kb}$, $a, b > 0$.

3. $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}$.

Exercice 2 E désigne l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$, $a < b$, qui ne prennent que des valeurs strictement positives. Soit φ l'application de E dans \mathbb{R} qui, à la fonction f de E , associe

$$\varphi(f) = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \right)$$

1. Montrer que $\varphi(E)$ est une partie non majorée de \mathbb{R} .
2. Montrer que $\varphi(E)$ admet une borne inférieure et trouver toutes les fonctions f de E telles que $\varphi(f)$ est égal à cette borne inférieure.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

1. Montrer que f est intégrable sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f n'est pas absolument intégrable sur $]0, +\infty[$.

