Devoir libre n°2

à rendre le 14/11/2011

•••••••••

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation $(z+1)^n - (z-1)^n = 0 \quad (1)$.

1. Résoudre l'équation (1).
2. Montrer que toutes les solutions de (1) sont imaginaires pures.

Exercice 2

1. On considére l'équation :

$$(1) \quad (z-p)^2 = p^2 - 1$$

où p est un paramètre réel.

Déterminer, suivant les valeurs de p, les solutions de (1).

2. Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(2) \quad (z-p)^2 = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi$$

où p est un paramètre complexe et $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Déterminer z_1 et z_2 solutions de (2).

On suppose que $p \neq 0$, d'argument constant θ. Quel est l'ensemble des points M d'affixe $\dfrac{z_1+z_2}{2}$.

Exercice 3 Soit $u = e^{\frac{2i\pi}{11}}$. On pose $S = u + u^4 + u^9 + u^5 + u^3$ et $T = u^2 + u^6 + u^7 + u^8 + u^{10}$.

1. Justifier les égalités : $u^{11} = 1$ et $\overline{u} = \dfrac{1}{u}$.
2. En déduire sans calculs que S et T sont conjugués.
3. Montrer que la partie imaginaire de S est positive (sans calcul numérique).
4. Démontrer que $S + T = -1$ et que $S \times T = 3$.
5. En déduire la valeur de S et celle de T.
6. Par définition, $\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{11}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{11}\right)}$.
   (a) À l'aide des formules d'Euler, montrer que :
   $$i \tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = \frac{u^3-1}{u^3+1} = -\sum_{k=1}^{10}(-u^3)^k.$$
   (b) Vérifier que $4i \sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right) = 2(u - u^{10})$.
7. En déduire que $\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right) = i(T-S) = \sqrt{11}$.

•••••••••