Devoir libre n°3

à rendre le 06/12/2011

••••••••

Exercice 1 1. Montrer que l'équation $(1)\ x^3 - 3x - 4 = 0$ admet une seule racine appartient à l'intervalle $]2, 3[$.

2. Nous proposons de résoudre cette équation de façon exacte. Pour cela, supposons qu'il existe u et v tels que :

$$\begin{cases} x = u + v \\ uv = 1 \end{cases}$$

a) Montrer que x est solution de (1) si et seulement si : $u^3 + v^3 = 4$.

b) En déduire u^3 et v^3puis x.

c) Vérifier que le nombre x trouvé est bien solution de (1).

Exercice 2 On cherche à déterminer une fonction f de $\mathbf{R}^+ = [0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$, qui soit continue sur $\mathbf{R}^+$, dérivable et de dérivée continue sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$, et telle que :

$$(1)\ \ \forall x \geq 0,\ \ f(x^2) = [f(x)]^2$$

1. a) Montrer que $\forall x \geq 0,\ f(x) \geq 0$

   b) Quelles sont les fonctions constantes qui peuvent convenir ?

2. Soit $a \in]0, 1[$. On considère la suite $u_n = f(a^{2^n})$ pour $n \geq 0$. On suppose f solution du problème.

   a) Montrer que cette suite est convergente. Quelle est sa limite ?

   b) Montrer que $f(a)$ ne peut pas être supérieure à 1.

   c) Montrer que si $f(a) = 1$, la fonction f est constante sur $[0, 1]$.

   d) Que dire de $f(a)$ si f est non constante sur $[0, 1]$? Que veut alors $f(0)$?

3. On suppose toujours $a \in]0, 1[$. On considère la suite $v_n = f(a^{2^{-n}})$ pour $n \geq 0$.

   a) Montrer que cette suite est convergente. Quelle est sa limite ?

   b) Montrer que si $f(a) = 1$, la fonction f est constante.

   c) On suppose f non constante ? Que veut alors $f(1)$?

4. On suppose f non constante.

   a) Montrer que $f(x) \neq 0, \forall x > 0$.

   b) On pose alors $g(x) = \frac{xf'(x)}{f(x)}$. Exprimer $g(x^2)$ en fonction de $g(x)$.

   c) Montrer que la fonction g est constante.

   d) En déduire toutes les fonctions f solution du problème.

••••••••••••