Devoir libre n°4

à rendre le 02/01/2012

•••••••

Exercice 1 Soit la fonction définie par :

$$f : x \mapsto x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right).$$

On ne demande pas de faire l'étude des variations de f, aucun tracé de courbe n'est demandé. Pour les deux questions posées, on utilisera des développements limités. On rappelle :

- le $\mathrm{DL}_3(0)$: $\arctan u = u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$;
- la formule $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \arctan(x) + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

1. Étudier les branches infinies (asymptote, position par rapport à l'asymptote).
2. Étude de f au voisinage de $x = -1$ (limite à gauche, à droite ; existence de demi-tangentes, position locale de la courbe par rapport aux demi-tangentes).

Exercice 2 Le but de l'exercice est de retrouver, par différentes méthodes, le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction arc sinus :

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)$$

On notera a, b, c les trois réels (supposés inconnus) tels que :

$$\arcsin x = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5).$$

1. Écrire le développement limité d'ordre 4 en 0 de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ En déduire les valeurs de a, b, c.
2. Écrire les développements limités d'ordre 4 de $\sin$ puis de $\sin \circ \arcsin$. Retrouver les valeurs de a, b, c.
3. Écrire les développements limités d'ordre 5 de $\cos$ en 0, puis de $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$, puis de $\cos(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$. En utilisant la formule , retrouver les valeurs de a, b, c.
4. Écrire, en fonction de a, b, c, les développement limités d'ordre 6 de la primitive de $\arcsin$ nulle en 0, ainsi que de la fonction $x \longmapsto x\arcsin(x) - \sqrt{1-x^2} + 1$. En utilisant le fait que ces deux fonctions sont égales, retrouver les valeurs de a, b, c.

Exercice 3 On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = e^{\frac{-1}{x}}$ si $x \neq 0$.

1. Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On étudiera la continuité et la dérivabilité à droite de f en 0.
2. Montrer qu'il existe un unique point A sur Γ, distinct de O, tel que la tangente à Γ au point A passe par O.

3. Montrer qu'il existe un unique point B sur Γ, d'abscisse strictement positive (notée b) et autre que A, en lequel la tangente à Γ est parallèle à la droite (OA). *Pour cela, on pourra étudier les variations de la fonction f'.*

4. On définit une fonction g par $g(x) = \dfrac{1}{1-2\ln x}$.
   (a) Préciser l'ensemble de définition de g et vérifier que l'on peut prolonger g par continuité en zéro (on posera alors $g(0) = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$).
   (b) Étudier les variations de g et construire sa courbe représentative. La fonction g est-elle dérivable en 0 ?
   (c) Montrer que les solutions de l'équation $g(x) = x$ sont les nombres 0, b et 1. Étudier le signe de $g(x) - x$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

5. Soit u une suite définie par la donnée de $u_0 \in]0, 1[$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = g(u_n)\ .$$

   (a) Montrer que la suite u converge vers b et préciser son sens de variation.
   (b) Calculer b à 10^{-2} près en précisant la méthode choisie.

••••••••••