

Devoir libre n°5

à rendre le 23/01/2012

● ● ● ● ● ● ● ● ● ●

Exercice 1

1. On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$.

Montrer que $*$ est commutative, non associative, et que 1 est élément neutre,

2. On munit $\mathbb{R}^{++}$ de la loi de composition interne $*$ définie par : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Montrer que $*$ est commutative, associative, et que 0 est élément neutre. Montrer que aucun élément de $\mathbb{R}^{++}$ n'a de symétrique pour $*$.

3. On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

Montrer que l'application $x \mapsto x^3$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, *)$ vers $(\mathbb{R}, +)$. En déduire que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe commutatif.

Exercice 2 Soit S l'intervalle réel $S =]-1, 1[$. On définit une loi $*$ sur S : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$.

Montrer que $(S, *)$ est un groupe commutatif.

Exercice 3 Montrer que tout anneau fini et intègre est un corps.

Exercice 4 On note A l'ensemble de réels suivant :

$$A = \{m + n\sqrt{6} / m, n \in \mathbb{Z}\}$$

1. Montrer que $(A, +, \cdot)$ (ensemble muni de l'addition et de la multiplication des réels), est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

On considère l'application φ , de A dans lui-même, qui à $m + n\sqrt{6}$ associe :

$$\varphi(m + n\sqrt{6}) = m - n\sqrt{6}.$$

2. Montrer que φ est un automorphisme de l'anneau $(A, +, \cdot)$ (c'est-à-dire une bijection, et un morphisme pour chacune des deux lois).
3. Pour tout $x \in A$, on pose $N(x) = x\varphi(x)$. Montrer que N est une application de A dans $\mathbb{Z}$, qui est un morphisme pour la multiplication.
4. Démontrer que x est un élément inversible de A si et seulement si $N(x) = \pm 1$.
5. Vérifier que $5 + 2\sqrt{6}$ est inversible dans A et calculer son inverse.

• • • • •