Devoir libre $n°7$
à rendre le 20/02/2012
•••••••••••

Étude des suites récurrentes $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

.
a et b étant deux nombres réels ($b \neq 0$), on considère l'ensemble S de suites $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels telles que : $(\forall n \geq 0), \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
On pose, pour $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0} \in S$ et $r \in \mathbb{R}$.

$$(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n) \quad et \quad r(u_n) = (ru_n)$$

1^{re}partie : Structure vectorielle de S.

1. Démontrer que S est un sous-espace vectoriel de l'espace, sur $\mathbb{R}$, de toutes les suites réelles.
2. Démontrer que l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$$

   est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
   En déduire la dimension de S.

2^{e}partie : Détermination pratique des suites vérifiant : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la suite géométrique $(\lambda^n)_{n\geq 0} \in S$.
2. On désigne par λ et μ les racines de $x^2 - ax - b = 0$ et $\triangle = a^2 + 4b$
   (a) Montrer que si $\triangle > 0$, alors les deux suites $(\lambda^n)_{n\geq 0}, (\mu^n)_{n\geq 0}$ forment une base de S.
   (b) Si $\lambda = \mu$, montrer que $(n\lambda^n)_{n\geq 0} \in S$ et que les deux suites $(\lambda^n)_{n\geq 0}, (n\lambda^n)_{n\geq 0}$ forment une base de S.
   (c) Si $\triangle < 0$, alors l'équation $x^2 - ax - b = 0$ a deux racines complexes conjugués $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$. Montrer que les deux suites $(r^n \cos n\theta)_{n\geq 0}, (r^n \sin n\theta)_{n\geq 0} \in S$ et qu'elles forment une base de S.

3^{e}partie : Applications.

1. Détermnier les suites vérifaint :

$$(1)\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+2} & = & -u_{n+1} + 2u_n \\ u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 0 \end{array}\right. \quad (2)\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+2} & = & -u_{n+1} - u_n \\ u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 2 \end{array}\right. \quad (3)\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+2} & = & 4u_{n+1} - 4u_n \\ u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & -2 \end{array}\right.$$

2. Montrer que la suite définie par : $c_0 = 1, c_0 = e, c_{n+2} = \sqrt{c_{n+1}c_n}$ est convergente et déterminer sa limite.
3. Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos nt}{1 - x\cos t} dt$.
   Déterminer une relation de récurrence entre I_n, I_{n-1}, I_{n-2}, en déduire l'expression de I_n. (On pourra calculer $I_n + I_{n-2}$)

••••••••••